秘密★考试结束前　[考试时间：2020 年 4 月 2 日 15:00~17:00]

全国大联考 2020 届高三 4 月联考

理科数学试卷

注意事项：

1．考试前，请务必将考生的个人信息准确的输入在正确的位置。

2．考试时间 **120** 分钟，满分 **150** 分。

3．本次考试为在线联考，为了自己及他人，请独立完成此试卷，切勿翻阅或查找资料。

4．考试结束后，本次考试原卷及参考答案将在网上公布。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 不等式$1-\frac{1}{x}>0$成立的充分不必要条件是

A. $x>1$　　B. $x>-1$　　C. $x<-1$或$0<x<1$　　D. $-1<x<1$

2. 复数 z=1+2i 的共轭复数是$\overline{z}$，则 z·$\overline{z}$=

A. $\sqrt{3}$　　B. 3　　C. 5　　D. $\sqrt{5}$

3. 已知随机变量$X\sim N(2,\sigma^2)$，若P（$1<X<3)=0.36$，则P（$X\geq 3)=$

A．0.64　　B．0.32　　C．0.36　　D．0.72

4. 设 m,n 是两条不同的直线，α，β 是两个不同的平面，由下列四个命题，其中正确的是

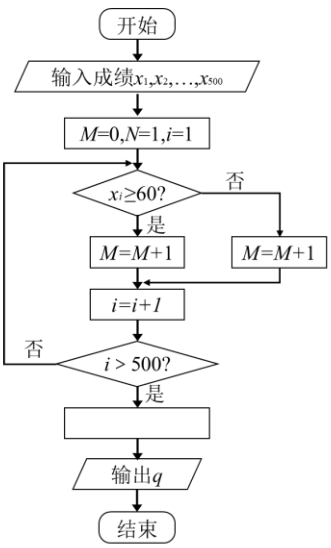
A. 若 $m\perp\alpha$，$m\perp n$，则 $n/\!/\alpha$　　B. 若 $m/\!/\alpha$，$n/\!/\alpha$，则 $m/\!/n$

C. 若 $\alpha/\!/\beta$，$m\subset\alpha$，则 $m/\!/\beta$　　D. 若 $m/\!/\beta$，$m\subset\alpha$，则 $\alpha/\!/\beta$

5. 已知$\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，则$\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=$

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$



6. 如图是某高校用于计算 500 名学生某学科（满分为 100 分）期末考试及格率 q 的程序框图，图中空白框内应填入

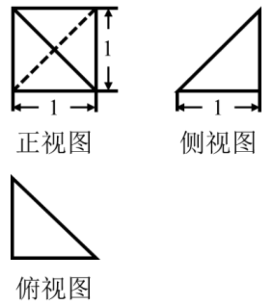
A. $q=\frac{N}{M}$　　B. $q=\frac{M}{N}$

C. $q=\frac{N}{M+N}$　　D. $q=\frac{M}{M+N}$

7. 右图是某几何体的三视图，该几何体的体积为

A. $\frac{1}{12}$　　　　B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{1}{3}$　　　　D. $\frac{1}{2}$



8. 设不等式组$\begin{cases} x-y\le 0 \\ 2x-y+2\ge 0 \\ x\ge 1 \end{cases}$表示的平面区域为 m，则

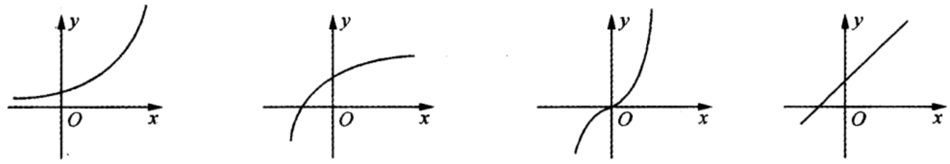
A. m 的面积为$\frac{9}{2}$　　　　B. m 内的点到 x 轴的距离有最大值

C. 点 A(x,y)在 m 内时，$\frac{x}{x+2}<2$　　　　D. 若点 $p(x_0,y_0)\in m$，则 $x_0+y_0\neq 2$

9. 已知$a=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}},b=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}},c=\log_3\pi$，则$a,b,c$的大小关系为

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$　　C. $c>a>b$　　D. $c>b>a$

10. 函数 $y=f(x)$的定义域为 **R**，且 $\varphi(x)$-$f(x)$-$f(x+a)$，对任意 $a<0$，$\varphi(x)$在 **R** 上是增函数，则函数 $y=f(x)$的图象可以是



A　　B　　C　　D

11. 双曲线$E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左，右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_1 作一条直线与两条渐近线分别相交于 A，B 两点，若$\overrightarrow{F_1B}=2\overrightarrow{F_1A}$，$|F_1F_2|=2|OB|$，则该双曲线的离心率为

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. 3

12. 已知函数 $f(x)=a\ln x+(a-1)x^2+1(a<0)$，在函数 $f(x)$图象上任取两点 A，B，若直线 AB 的斜率的绝对值都不小于 5，则实数 a 的取值范围是

A.（$-\infty$，0）　　B.（$-\infty$，$\frac{2-3\sqrt{6}}{4}$）　　C.（$-\infty$，$-\frac{2-3\sqrt{6}}{4}$）　　D.（$\frac{2-3\sqrt{6}}{4}$，0）

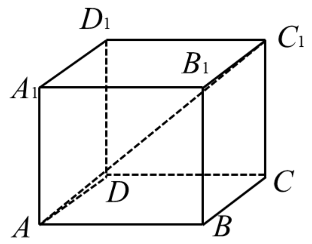
二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知$(3x-1)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_5x^5$，则 $a_1+a_3+a_5=$__________

14. 已知P是抛物线$y^2=4x$上的动点，A（$2,\sqrt{15}$），若点P到 y 轴的距离为d_1，点P到点A的距离为d_2，则d_1+d_2的最小值是_________.

15. 已知定义在实数集 R 上的函数 $f(x)$满足 $f(1)=0$，且 $f(x)$的导函数 $f'(x)$满足 $f'(x)+1<0$，则不等式 $f(\ln x)+\ln x>1$ 的解集为_______.（结果用区间表示）

16. 如图,点 P 是正方形 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 外的一点,过点 P 作直线 l,记直线 l 与直线 AC_1，BC 的夹角分别为θ_1，θ_2，若$\sin(\theta_1-50°)=\cos(140°-\theta_2)=\dfrac{1}{2}$，则满足条件的直线 l 有_______条。



三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：（共 60 分）

17.（12 分）在$\triangle ABC$中,角 A,B,C 的对边分别为a,b,c,且$c\sin A=\sqrt{3}a\cos C$.

（1）求角 C 的值;

（2）若 $S_{\triangle ABC}=2\sqrt{3}$, $a+b=6$,求 c 的值.

18.（12 分）现有甲、乙两种不同规格的产品,其质量按测试指标分数进行划分,其中分数不小于 82 分的为合格品,否则为次品.现随机抽取两种产品各 100 件进行检测,其结果如下:

测试指标分数	[70,76)	[76，82)	[82,88)	[88,94)	[94,100)
甲产品	8	12	40	32	8
乙产品	7	18	40	29	6

（1）根据以上数据,完成右边的 2×2 列联表,并判断是否有 95%的有把握认为两种产品的质量有明显差异？

	甲产品	乙产品	合计
合格品			
次品			

（2）已知生产 1 件甲产品,若为合格品,则可盈利 40 元,若为次品,则亏损 5 元;生产 1 件乙产品,若为合格品,则可盈利 50 元,若为次品,则亏损 10 元.记 X 为生产 1 件甲产品和 1 件乙产品所得的总利润,求随机变量 X 的分布列和数学期望（将产品的合格率作为抽检一件这种产品为合格品的概率）

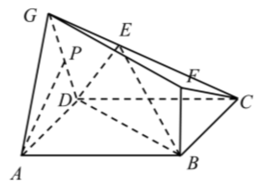
参考公式：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(K^2\geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.702	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

19.（12 分）如图所示的多面体中，底面 ABCD 为正方形，△GAD 为等边三角形，BF⊥平面 ABCD，∠GDC＝90°，点 E 是线段 GC 上除两端点外的一点.

（1）若点 P 为线段 GD 的中点，证明：AP⊥平面 GCD;

（2）若二面角 B－DE－C 的余弦值为$\dfrac{\sqrt{7}}{7}$，试通过计算说明点 E 的位置.



20.（12 分）设 F_1,F_2 分别是椭圆 $E:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的左、右焦点,若 P 是该椭圆上的一个动点，$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的最大值为1.

（1）求椭圆 E 的方程;

（2）设直线 $l:x=ky-1$ 与椭圆交于不同的两点 A,B,且 $\angle AOB$ 为锐角(其中 O 为坐标原点),求 k 的取值范围.

21.（12 分）已知函数 $f\left(x\right)=x^2-8x+a\ln x\left(a\in\mathrm{R}\right)$

（1）当 $x=1$ 时，$f\left(x\right)$ 取得极值,求 a 的值并判断 $x=1$ 是极大值点还是极小值点

（2）当函数 $f\left(x\right)$ 有两个极值点 $x_1,x_2\left(x_1<x_2\right)$,且 $x_1\neq1$ 时,总有 $\dfrac{a\ln x_1}{1-x_1}>t\left(4+3x_1-x_1^2\right)$ 成立,求 t 的取值范围.

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题做答。如果多做，则按所做的第一题记分。

22.【选修 4-4：坐标系与参数方程】（12 分）

在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}t\\ y=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$ （t 为参数）. 以坐标原点为极点， x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 圆 C 的极坐标方程为 $p=2\sin\theta$

（1）判断直线 l 与圆 C 的交点个数

（2）若圆 C 与直线 l 交于 A,B 两点, 求线段 AB 的长度

23.【选修 4-5:不等式选讲】（12 分）

已知函数 $f(x)=|x-5|-|x+3|$.

（1）解不等式 $f(x)\geq x+1$；

（2）记函数 $\mathrm{f}(x)$ 的最大值为 m，若 $a>0,b>0$, $e^a\cdot e^{4b}=e^{4ab-m}$，求 ab 的最小值.

全国大联考 2020 届高三 4 月联考

理科数学参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	C	B	C	C	D	D	C	D	A	C	B

12.【解析】$f'(x)=\frac{2(a-1)x^2+a}{x}<0$，$f(x)$在（0, +∞）单调递减.

A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)，$\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right|\geq5$.

设 $x_1>x_2>0$，则 $f(x_1)\leq f(x_2)+5x_2$，

设 $g(x)=f(x)+5x$，则 $g(x)$在$(0, +\infty)$上单调递减，

则 $g'(x)=\frac{2(a-1)x^2+5x+a}{x}\leq0$ 对 $x\in(0, +\infty)$恒成立.

则 $2(a-1)x^2+5x+a$ 对 $x\in(0, +\infty)$恒成立，则$\triangle\leqslant0$，即 $8a^2-8a-25\geqslant0$,

解得 $a\leqslant\frac{2-3\sqrt{6}}{4}$ 或 $a\geqslant\frac{2+3\sqrt{6}}{4}$.又 $a<0$，所以 $a\leqslant\frac{2-3\sqrt{6}}{4}$.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．528　　14．3　　15．$(0, e)$　　16．4

三、解答题：共 70 分.

17.（12 分）

解：（1）在$\triangle ABC$中，$c\sin A=\sqrt{3}a\cos C$,

$\therefore$结合正弦定理得$\sin C\sin A=\sqrt{3}\sin A\cos C$,

$\because 0<A<\pi,\therefore\sin A>0$,

$\therefore\sin C=\sqrt{3}\cos C$,

又$\because\sin C\neq0$,

$\therefore\tan C=\sqrt{3},\therefore C=\frac{\pi}{3}$.

（2）$\because S_{\triangle ABC}=2\sqrt{3}, C=\frac{\pi}{3}$,

$\therefore \frac{1}{2}ab\sin C=2\sqrt{3}$,

$\therefore ab=8$,

又 $a+b=6$,

$\therefore c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$=(a+b)^2-2ab-2ab\cos C$

$=36-16-8=12$.

$\therefore c=2\sqrt{3}$.

18.（12 分）

解：（1）列联表如下:

	甲产品	乙产品	合计
合格品	80	75	155
次品	20	25	45
合计	100	100	200

$$K^2=\frac{200\times(80\times25-75\times20)^2}{100\times100\times155\times45}\approx0.717<3.841$$

∴没有95%的有把握认为两种产品的质量有明显差异

（2）依题意,生产一件甲,乙产品为合格品的概率分别为 $\frac{4}{5},\frac{3}{4}$,

随机变量 X 可能取值 90,45,30,-15

$$P(X=90)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{5}$$

$$P(X=45)=\frac{1}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{20}$$

$$P(X=30)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$$

$$P(X=-15)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$$

X 的分布列为:

X	90	45	30	-15
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$

$$\therefore E(X)=90\times\frac{3}{5}+45\times\frac{3}{20}+30\times\frac{1}{5}-15\times\frac{1}{20}=66$$

19.（12 分）

解：（1）因为△GAD 是等边三角形，点 P 为线段 GD 的中点，故 $AP\perp GD$，

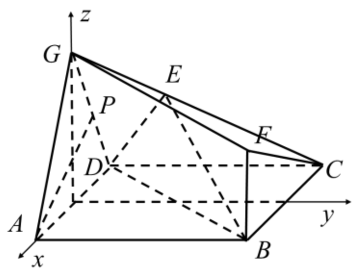
因为 $AD\perp CD$，$GD\perp CD$，且 $AD\cap GD=D$，故 $CD\perp$平面 GAD，

又 $AP\subset$平面 GAD，故 $CD\perp AP$，

又 $CD\cap GD=D$，故 $AP\perp$平面 GCD.

（2）取 AD 的中点 O，以 OA 所在直线为 x 轴，过 O 点作平行于 AB 的直线为 y 轴，OG 所在直线为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，

设 $AD=2$，则 $G(0,0,\sqrt{3})$，$C(-1,2,0)$，故$\overrightarrow{GC}=(-1,2,-\sqrt{3})$，



设$\overrightarrow{GE}=\lambda\overrightarrow{GC}=(-\lambda,2\lambda,-\sqrt{3}\lambda)(0<\lambda<1)$，

故 $E=(-\lambda,2\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$.

又 $B(1,2,0)$，$D(-1,0,0)$，$C(-1,2,0)$，

故$\overrightarrow{DE}=(1-\lambda,2\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$，$\overrightarrow{BD}=(-2,-2,0)$，

设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$为平面 BDE 的法向量，则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\\\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\end{cases}$

故$\begin{cases}(1-\lambda)x+2\lambda y+(\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)z=0,\\x+y=0,\end{cases}$

令 $x=1$，故 $y=-1$，$z=\dfrac{3\lambda-1}{\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda}$，

故 $\boldsymbol{m}=\left(1,-1,\dfrac{3\lambda-1}{\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda}\right)$为平面 BDE 的一个法向量.

由(I)可知，$\overrightarrow{AP}=\left(-\dfrac{3}{2},0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$为平面 DEC 的一个法向量，

故$|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{AP}\rangle|=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$，即$\dfrac{\left|-\dfrac{3}{2}+\dfrac{(3\lambda-1)}{2(1-\lambda)}\right|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2+\dfrac{(3\lambda-1)^2}{3(1-\lambda)^2}}}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$，令$\dfrac{3\lambda-1}{1-\lambda}=t$，则$\dfrac{\left|-\dfrac{3}{2}+\dfrac{t}{2}\right|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2+\dfrac{t^2}{3}}}=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$，

$t^2-14t+13=0$，$t=1$ 或 13，解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$或$\dfrac{7}{8}$，经检验知 $\lambda=\dfrac{1}{2}$，

此时点 E 为线段 GC 的中点.

20.（12 分）

解：（1）由题易知$a=2$，$c=\sqrt{4-b^2}$，$b^2<4$，

所以 $F_1\left(-\sqrt{4-b^2},0\right)$，$F_2\left(\sqrt{4-b^2},0\right)$，

设$P\left(x,y\right)$,则$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=\left(-\sqrt{4-b^2}-x,-y\right)\cdot$

$\left(\sqrt{4-b^2}-x,-y\right)=x^2+y^2-4+b^2=x^2+b^2-\dfrac{b^2x^2}{4}-4+b^2=\left(1-\dfrac{b^2}{4}\right)x^2+2b^2-4$,

因为$x\in\left[-2,2\right]$,故当$x\pm2$,即点P为椭圆长轴端点时，$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$有最大值$1$,

即$1=\left(1-\dfrac{b^2}{4}\right)\times4+2b^2-4$,解得$b^2=1$,

故所求的椭圆方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$。

（2）设$A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$,由$\dfrac{1}{3}<x_1<\dfrac{1}{e}$,

得$y_1+y_2=\dfrac{2k}{k^2+4}$,$y_1\cdot y_2=\dfrac{-3}{k^2+4}$,

$\Delta=\left(2k\right)^2+12\left(4+k^2\right)=16k^2+48>0$,

因为$\angle AOB$为锐角,所以$\cos\angle AOB>0$,

所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2>0$,

又$x_1x_2+y_1y_2=\left(1+k^2\right)y_1y_2-k\left(y_1+y_2\right)+1$

$=\left(1+k^2\right)\cdot\dfrac{-3}{4+k^2}-\dfrac{2k^2}{4+k^2}+1$

$=\dfrac{-3-3k^2-2k^2+4+k^2}{4+k^2}$

$=\dfrac{1-4k^2}{4+k^2}>0$,

所以$k^2<\dfrac{1}{4}$,解得$-\dfrac{1}{2}<k<\dfrac{1}{2}$,

所以k的取值范围是$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$。

21.（12 分）

解：（1） $f'(x)=\dfrac{2x^2-8x+a}{x}(x>0)$, $f'(1)=0$,则$a=6$

从而$f'(x)=\dfrac{2(x-1)(x-3)}{x}(x>0)$,所以$x\in\left(0,1\right)$时， $f'\left(x\right)>0$, $f\left(x\right)$为增函数;

$x\in\left(1,3\right)$时， $f'\left(x\right)<0$, $f\left(x\right)$为减函数,所以 x=1 为极大值点.

（2）函数$f\left(x\right)$的定义域为$(0,+\infty)$,有两个极值点$x_1,x_2\left(x_1<x_2\right)$,

则 $t(x)=2x^2-8x+a=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不等的正实根,

所以 $0<a<8$,

由 $\begin{cases}x_1+x_2=4\\x_1x_2=\dfrac{a}{2}\\x_1<x_2\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}0<x_1<2\\a=2x_1(4-x_1)\end{cases}$

从而问题转化为在 $0<x_1<2$,且 $x_1\neq1$ 时 $\dfrac{a\ln x_1}{1-x_1}>t\left(4+3x_1-x_1^2\right)$ 成立.

即证 $\dfrac{2x_1(4-x_1)\ln x_1}{1-x_1}>t\left(4+3x_1-x_1^2\right)$ 成立.

即证 $\dfrac{2x_1\ln x_1}{1-x_1}>t(x_1+1)$

即证 $\dfrac{2x_1\ln x_1}{1-x_1}-t(x_1+1)>0$ 亦即证 $\dfrac{x_1}{1-x_1}\left[2\ln x_1+\dfrac{t\left(x_1^2-1\right)}{x_1}\right]>0$.

①令 $h(x)=2\ln x+\dfrac{t\left(x^2-1\right)}{x}(0<x<2)$ 则 $h'(x)=\dfrac{tx^2+2x+t}{x^2}(0<x<2)$

(i)当 $t\geq0$ 时, $h'(x)>0$,则 $h(x)$ 在 $(0,2)$ 上为增函数且 $h(1)=0$,

①式在 $(1,2)$ 上不成立.

(ii)当 $t<0$ 时,$\triangle=4-4t^2$

若 $\triangle\leq0$,即 $t\leq-1$ 时, $h'(x)\leq0$,

所以 $h(x)$ 在 $(0,2)$ 上为减函数且 $h(1)=0$, $\dfrac{x_1}{1-x_1}$ 、 $2\ln x_1+\dfrac{t\left(x_1^2-1\right)}{x_1}$ 在区间 $(0,1)$ 及 $(1,2)$ 上同号,故①式成立.

若 $\Delta>0$,即 $-1<t<0$ 时, $y=tx^2+2x+t$ 的对称轴 $x=-\dfrac{1}{t}>1$,

令 $a=\min\left\{-\dfrac{1}{t},2\right\}$,则 $1<x<a$ 时, $h(x)>0$,不合题意.

综上可知: $t\leq-1$ 满足题意.

（二）选考题（10 分）

22.（12 分）

解：（1）∵直线l的参数方程为$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}t \\ y=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$（$t$为参数）.

∴消去参数t得直线l的普通方程为$\sqrt{3}x+y-1=0$,

∵圆C的极坐标方程为$p=2\sin\theta$, 即$p^2=2p\sin\theta$,

∴由$p^2=x^2+y^2, p\sin\theta=y$, 得圆$C$的直角坐标方程为$x^2+y^2-2y=0$.

∵圆心$(0,1)$在直线l上,

∴直线l与圆C的交点个数为2

（2）由（1）知圆心$(0,1)$在直线l上,

∴ AB为圆C的直径,

∵圆C的直角坐标方程为$x^2+y^2-2y=0$.

∴圆C的半径$r=\dfrac{1}{2}\sqrt{4}=1$,

∴圆C的直径为2,

∴$|AB|=2$

23.（12 分）

解：（1）当$x\le-3$时,由$5-x+x+3\ge x+1$,得$x\le7$,

所以$x\le-3$;当$-3<x<5$时,

由$5-x-x-3\ge x+1$,得$x\le\dfrac{1}{3}$,所以$-3<x\le\dfrac{1}{3}$;

当$x\ge5$时,由$x-5-x-3\ge x+1$,

得$x\le-9$,无解.综上可知，$x\le\dfrac{1}{3}$,

即不等式$f(x)\ge x+1$的解集为$\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right]$.

（2）因为$|x-5|-|x+3|\le|x-5-x-3|=8$,

所以函数$f(x)$的最大值$m=8$.应为$e^a\cdot e^{4b}=e^{4ab-8}$,

所以$a+4b=4ab+8$.

又$a>0,b>0$,

所以$a+4b\geq 2\sqrt{4ab}=4\sqrt{ab}$,

所以有$ab-2-\sqrt{ab}\geq 0$,又$\sqrt{ab}>0$,

所以$\sqrt{ab}>2$,$ab\geq 4$,

即ab的最小值为4