衡中同卷

参考答案及解析

2022 届全国高三第一次学业质量联合检测 · 文科数学

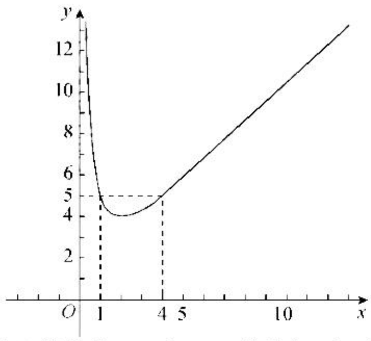
一、选择题

1. C 【解析】因为集合 $A=\{x\mid x=e^n,n=-1,0,1,2\}=\left\{\frac{1}{e},1,e,e^2\right\}$，$B=\{x\mid y=\sqrt{1-x}\}=\{x\mid x\leqslant 1\}$，所以 $A\cap B=\left\{\frac{1}{e},1\right\}$.

2. C 【解析】对于 A，景区客流量有增有减，故错误；对于 B，由于是 10 个月份的客流量，因此数据的中位数为 3 月份和 7 月份对应人数的平均数，故错误；对于 D，4 月至 5 月的客流量增长量与 8 月至 9 月的客流量回落量相比，明显不同，故错误.

3. A 【解析】由 $z=\frac{2+i}{1+i^{11}}=\frac{2+i}{1-i}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$，得对应的点的坐标为 $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$，位于第一象限.

4. B 【解析】函数 $f(x)=x+\frac{4}{x}$，当 $x<0$ 时，$f(x)<0$，当 $x>0$ 时，函数 $f(x)$ 的图象如图所示，由图象可知，当 $0<x<1$ 或 $x>4$ 时，均满足 $f(x)>5$. 故“$x>4$”是“$f(x)>5$”的充分不必要条件.

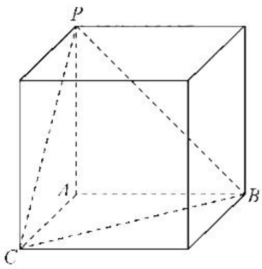


5. D 【解析】抛物线 $C_1:y^2=12x$ 的焦点坐标为 $(3,0)$，双曲线 $C_2:y^2-x^2=4$ 的渐近线方程为 $y=\pm x$，利用点到直线的距离公式得 $d=\frac{|3|}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

6. A 【解析】第一批次，培养 1 个；从第二批次开始，每一批次培养的个数是前一批次的 2 倍，培养若干批次后，求微生物的总个数，符合等比数列求和模型. 因而，培养第 n 批次后，微生物的总个数为 $\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$，令 $2^n-1\geqslant 950$，即 $2^n\geqslant 951$. 因为 n 是正整数，所以 $n=10$.

7. B 【解析】由 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=9$，$S_{\triangle ABC}=6$，可得 $\begin{cases}ca\cos B=9,\\ ca\sin B=12,\end{cases}$ 所以 $\tan B=\frac{4}{3}$，则 $\sin 2B=\frac{2\sin B\cos B}{\sin^2 B+\cos^2 B}=\frac{2\tan B}{1+\tan^2 B}=\frac{24}{25}$.

8. D 【解析】如图，可以借助正方体模型，找到这个三棱锥 $P\text{-}ABC$. 该三棱锥各个面中，面积最大的是面 PBC，该面所对应的顶点是点 A，设点 A 到面 PBC 的距离为 h，由等体积法，可得 $V_{三棱锥P\text{-}ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 2\times 2=\frac{4}{3}$，$V_{三棱锥A\text{-}PBC}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times h$，$V_{三棱锥P\text{-}ABC}=V_{三棱锥A\text{-}PBC}$，解得 $h=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.



9. B 【解析】当 $x=1$ 时，$f(1)=0$. 因为 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，所以 $f'(1)=1$，所以曲线 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-0=1\cdot(x-1)$，即 $x-y-1=0$. 因为 $x-y-1=0$ 与两坐标轴的交点坐标为 $(1,0)$ 和 $(0,-1)$，所以此切线与两坐标轴围成的三角形的面积为 $\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$.

10. D 【解析】对于甲，该函数图象经过点 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$，可得 $\varphi=\frac{\pi}{6}$；对于乙，该函数图象两条相邻对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{4}$，可得 $T=\frac{\pi}{2}$，$\omega=\frac{2\pi}{T}=4$. 此时，函数解析式为 $f(x)=\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)$，假设甲、乙正确，对于丙，当 $x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right]$ 时，$4x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$，此时 $f(x)\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$，函数 $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{1}{2}$，正确；对于丁，当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(4\times\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{1}{2}\neq 0$，错误.

11. D 【解析】因为对于定义域内的任意一个 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是奇函数；由当 $x>0$ 时，满足 $f(x)+xf'(x)>0$ 恒成立，可得 $[xf(x)]'>0$ 恒成立，设 $g(x)=xf(x)$，则 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，根据奇偶性可知，$g(x)=xf(x)$ 为偶函数，因而，$g(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递减；由 $f(3)=2$，可知 $g(3)=3f(3)=6$，则不等式 $f(x)>\frac{6}{x}\Leftrightarrow\frac{xf(x)-6}{x}>0\Leftrightarrow$ 当 $x>0$ 时，$g(x)>g(3)$，得

$x>3$;当 $x<0$ 时,$g(x)<g(3)=g(-3)$,得 $-3<x<0$.综上,原不等式的解集为 $(-3,0)\cup(3,+\infty)$.

12. C 【解析】设 $\angle BOx=\theta\left(\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$,则 $a=\cos\theta$,$b=\sin\theta$,$c=\tan\theta$.对于 A,由于 $\angle BOx=\theta\left(\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$,由三角函数线可以直观得到 $a<b<c$,故 A 正确;对于 B,方法 1:因为 $a^2+b^2=1(a>0,b>0)$,所以 $ab<\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{1}{2}$(因为 $a\neq b$,所以等号取不到);方法 2:因为 $a=\cos\theta,b=\sin\theta$,所以 $ab=\frac{1}{2}\sin 2\theta$,因为 $\theta\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $ab<\frac{1}{2}$,故 B 正确;对于 C,因为 $0<a<b<1<c$,所以 $\log_a c<0<a^b<a^a<b^a$,故 C 错误;对于 D,$a+b=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$,因为 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$,所以 $1<\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)<\sqrt{2}$,即 $1<a+b<\sqrt{2}$,故 D 正确.

二、填空题

13. $\sqrt{3}$ 【解析】因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}$,所以 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{1+4\times\left(-\frac{1}{2}\right)+4}=\sqrt{3}$.

14. $\sqrt{2}\pi$ 【解析】由题意知,旋转一周形成的几何体是圆锥,此时圆锥的母线长为 $\sqrt{2}$,底面半径为 1,侧面积 $S=\pi rl=\sqrt{2}\pi$.

15. $4\sqrt{5}+10$ 【解析】在 $\triangle MOP$ 中,由余弦定理,可得 $MP=\sqrt{4+16-16\cos\theta}=\sqrt{20-16\cos\theta}$,$S_{四边形OMNP}=S_{\triangle OMP}+S_{\triangle MNP}=\frac{1}{2}\times2\times4\times\sin\theta+\frac{1}{2}(20-16\cos\theta)=4\sin\theta-8\cos\theta+10=4\sqrt{5}\sin(\theta-\varphi)+10(\tan\varphi=2)$,当且仅当 $\sin(\theta-\varphi)=1$ 时,面积有最大值,最大值为 $4\sqrt{5}+10$.

16. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 【解析】当直线 MN 的斜率存在时,设直线 MN 的方程为 $y=kx+m$,$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,联立方程 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\ y=kx+m,\end{cases}$ 化简整理得 $(a^2k^2+b^2)x^2+2a^2kmx+a^2(m^2-b^2)=0$,$\Delta>0$,由根与系数的关系可得 $\begin{cases}x_1x_2=\frac{a^2(m^2-b^2)}{a^2k^2+b^2},\\ y_1y_2=\frac{b^2(m^2-a^2k^2)}{a^2k^2+b^2}.\end{cases}$ 由 $OM\perp ON$ 可知 $x_1x_2+y_1y_2=0$,即 $a^2m^2-a^2b^2+b^2m^2-a^2b^2k^2=0$,整理得 $(a^2+b^2)m^2=a^2b^2(1+k^2)$.又原点到直线 MN 的距离 $d=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{\frac{m^2}{k^2+1}}=\sqrt{\frac{m^2(a^2+b^2)}{(k^2+1)(a^2+b^2)}}=\sqrt{\frac{a^2b^2(1+k^2)}{(k^2+1)(a^2+b^2)}}=\sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}$,即 $x^2+y^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$,由题意得 $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{2b^2}{3}$,解得 $a^2=2c^2$,$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.当直线 MN 的斜率不存在时,易得 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

三、解答题

17. 解:(1)由调查数据,选择在甲平台销售,日销售额大于 8 万元的比率为 $\frac{7}{20}=0.35$, (1 分)

因此厂家在甲平台日销售额大于 8 万元的概率的估计值为 0.35; (3 分)

选择在乙平台销售,日销售额大于 8 万元的比率为 $\frac{14}{20}=0.7$, (4 分)

因此厂家在乙平台日销售额大于 8 万元的概率的估计值为 0.7. (6 分)

(2)根据公式,计算可得

K^2 的观测值 $k=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{40\times(182-42)^2}{20\times20\times19\times21}\approx4.912$, (8 分)

因为 $4.912>3.841$, (10 分)

所以有 95% 的把握认为该产品的日销售额是否超过 8 万元与选择的直播平台有关. (12 分)

18. 解:(1)因为 a_n^2,S_n,a_n 成等差数列,

所以 $2S_n=a_n^2+a_n$. (1 分)

当 $n\geqslant2$ 时,$2S_{n-1}=a_{n-1}^2+a_{n-1}$, (2 分)

两式作差化简,得 $(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-1)=0$. (3 分)

因为该数列是正项数列,所以 $a_n-a_{n-1}-1=0$,即 $a_n-a_{n-1}=1$, (4 分)

所以数列 $\{a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列,且当 $n=1$ 时,$2a_1=a_1^2+a_1$,得 $a_1=1$, (5 分)

所以 $a_n=n$. (6 分)

(2)若选择条件Ⅰ:数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=(-1)^na_n=(-1)^nn$,

所以 $T_n=-1+2-3+4-5+6-\cdots+(-1)^nn$, (7 分)

当 n 为偶数时,$T_n=(-1+2)+(-3+4)+(-5+6)+\cdots+[-(n-1)+n]=\frac{n}{2}\times1=\frac{n}{2}$; (9 分)

当 n 为奇数时,$T_n=(-1+2)+(-3+4)+(-5+6)+\cdots+[-(n-2)+(n-1)]-n=\frac{(n-1)}{2}\times1-n=\frac{n-1-2n}{2}=-\frac{1+n}{2}$. (11 分)

所以 $T_n=\begin{cases}\frac{n}{2},n\text{ 为偶数},\\ -\frac{1+n}{2},n\text{ 为奇数}.\end{cases}$ (12 分)

若选择条件Ⅱ:数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=2^{a_n}\cdot a_n=n\cdot2^n$,

利用乘公比错位相减法,可得 $T_n=1\times2^1+2\times2^2+\cdots+n\times2^n$ ①, (7 分)

$2T_n=1\times2^2+2\times2^3+\cdots+n\times2^{n+1}$ ②, (8 分)

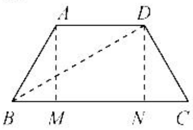
①−②得 $-T_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\times2^{n+1}=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n\times2^{n+1}=(1-n)\times2^{n+1}-2$, (11 分)

则 $T_n=(n-1)\times2^{n+1}+2$. (12 分)

若选择条件Ⅲ：数列$\{b_n\}$满足$b_n=\dfrac{1}{\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n}}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$，（9分）

则$T_n=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\sqrt{n+1}-1$.（12分）

19. (1)**证明**：如图，在等腰梯形中，过A,D分别作底边的垂线，垂足分别为M,N，



在Rt△DNC中，$CN=\dfrac{1}{2}$，$\angle NDC=\dfrac{\pi}{6}$，所以$CD=1$.（1分）

在△ABD中，

$AB=AD=1$，$\angle BAD=\dfrac{2\pi}{3}$，由余弦定理可知，$BD=\sqrt{1^2+1^2-2\times1\times1\times\cos\dfrac{2\pi}{3}}=\sqrt{3}$，（2分）

在△BDC中，

$BD=\sqrt{3}$，$BC=2$，$CD=1$，满足$BD^2+CD^2=BC^2$，

所以$BD\perp CD$.（3分）

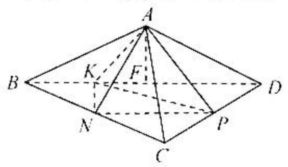
因为平面$ABD\perp$平面BCD，

且平面$BDC\cap$平面$ABD=BD$，$CD\subset$平面BDC，

所以$CD\perp$平面ABD.（5分）

又因为$BE\subset$平面ABD，所以$CD\perp BE$.（6分）

(2)**解**：



三棱锥K-ANP的体积是定值.（7分）

因为$CN=BN$，$CP=DP$，所以$NP\parallel BD$.

所以$S_{\triangle KPN}=S_{\triangle DPN}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{8}$.（8分）

取BD的中点F，连接AF，如图，

因为$AB=AD$，所以$AF\perp BD$.（9分）

因为平面$ABD\perp$平面BCD，且平面$BDC\cap$平面$ABD=BD$，$AF\subset$平面ABD，

所以$AF\perp$平面BCD.（10分）

又在△ABD中，$AB=AD=1$，$\angle BAD=\dfrac{2\pi}{3}$，

所以$AF=\dfrac{1}{2}$，（11分）

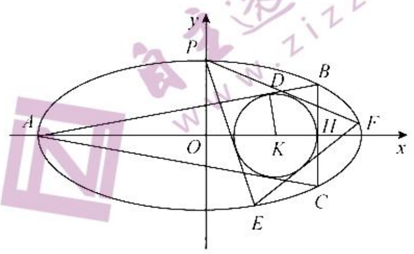
所以$V_{三棱锥K\text{-}ANP}=V_{三棱锥A\text{-}DNP}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle DNP}\cdot AF=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{8}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{48}$为定值.（12分）

20. **解**：(1)椭圆M的焦点和顶点均在坐标轴上，直线$x-\sqrt{15}y+\sqrt{15}=0$与坐标轴的交点坐标为$(-\sqrt{15},0),(0,1)$，因而，椭圆M中$c=\sqrt{15}$，$b=1$，（2分）

所以$a=\sqrt{b^2+c^2}=4$，（3分）

所以椭圆M的方程为$\dfrac{x^2}{16}+y^2=1$.（4分）

(2)



(ⅰ)由题意知$x^2+y^2-4x+m=0$，即$(x-2)^2+y^2=4-m$.

如图，过圆心K作$KD\perp AB$，BC与x轴交于点H，则根据△DKA与△HBA相似，可得$\dfrac{DK}{DA}=\dfrac{BH}{AH}$，（5分）

为运算方便，设$\sqrt{4-m}=r$，$B(2+r,y_0)$，

则$\dfrac{r}{\sqrt{36-r^2}}=\dfrac{y_0}{6+r}$，解得$y_0=\dfrac{r\sqrt{6+r}}{\sqrt{6-r}}$.

又因为点$B(2+r,y_0)$在椭圆M上，代入椭圆方程，得$\dfrac{(2+r)^2}{16}+\dfrac{r^2(6+r)}{(6-r)}=1$，整理得$15r^3+98r^2+36r-72=0$，即$15r^3+90r^2+8r^2+36r-72=0$，因式分解得$15r^2(r+6)+(r+6)(8r-12)=0$，

即$(r+6)(15r^2+8r-12)=0$，$(r+6)(3r-2)(5r+6)=0$，解得$r=\dfrac{2}{3}$，即$m=\dfrac{32}{9}$.（6分）

(ⅱ)椭圆M上存在两点E,F，使得圆K是△PEF的内切圆.

下面只需证明，当直线PE,PF与圆K相切时，直线EF与圆K相切即可.圆K：$(x-2)^2+y^2=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$，点$P(0,1)$，设过点$P$与圆$K$相切的直线方程为$y=kx+1$，

则$\dfrac{2}{3}=\dfrac{|2k+1|}{\sqrt{1+k^2}}$，即$32k^2+36k+5=0$，解得$k_1=\dfrac{-9+\sqrt{41}}{16}$，$k_2=\dfrac{-9-\sqrt{41}}{16}$.（7分）

将$y=kx+1$与椭圆方程联立，可得$(16k^2+1)x^2+32kx=0$，

则非零的解为$x=-\dfrac{32k}{16k^2+1}$.（8分）

设$F(x_1,k_1x_1+1)$，$E(x_2,k_2x_2+1)$，则$x_1=-\dfrac{32k_1}{16k_1^2+1}$，$x_2=-\dfrac{32k_2}{16k_2^2+1}$，

则直线EF的斜率为$k_{EF}=\dfrac{k_2x_2-k_1x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{k_1+k_2}{1-16k_1k_2}=\dfrac{3}{4}$，（9分）

于是直线EF的方程为$y+\dfrac{32k_1^2}{16k_1^2+1}-1=\dfrac{3}{4}\left(x+\dfrac{32k_1}{16k_1^2+1}\right)$，

即$y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{7}{3}$.（10分）

由$\begin{cases}y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{7}{3},\\ \dfrac{x^2}{16}+y^2=1,\end{cases}$得$45x^2-252x+320=0$，

经验证$\Delta>0$. (11分)

则圆心$(2,0)$到直线EF的距离$d=\dfrac{\left|\dfrac{3}{2}-\dfrac{7}{3}\right|}{\sqrt{1+\dfrac{9}{16}}}=\dfrac{2}{3}$，

所以直线EF也与圆K相切，所以椭圆M上存在点E,F，使得圆K是$\triangle PEF$的内切圆，直线EF的方程为$y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{7}{3}$. (12分)

21. (1)**解**：由$f(x)=e^x(1-x)$，则$f'(x)=-xe^x$. (1分)

令$f'(x)>0$，解得$x<0$；令$f'(x)<0$，解得$x>0$. (3分)

所以$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,0)$，单调递减区间为$(0,+\infty)$. (4分)

(2)**证明**：对等式$e^b-e^a=be^a-ae^b$，左右两边同时除以e^{a+b}，可得$\dfrac{1}{e^a}-\dfrac{1}{e^b}=\dfrac{b}{e^b}-\dfrac{a}{e^a}$，

所以$\dfrac{1}{e^a}[1-(-a)]=\dfrac{1}{e^b}[1-(-b)]$，

即$e^{-a}[1-(-a)]=e^{-b}[1-(-b)]$，

即$f(-a)=f(-b)$. (6分)

不妨设$-a=x_1$，$-b=x_2$，且$x_1<x_2$，即$f(x_1)=f(x_2)$.由图象可知$x_1<0,x_2>0$，

要证$a+b>0$，即证$(-a)+(-b)<0$，即$x_1+x_2<0$，

即证$x_1<-x_2$. (8分)

因为$f(x)$在区间$(-\infty,0)$上单调递增，所以即证$f(x_1)<f(-x_2)$， (9分)

又因为$f(x_1)=f(x_2)$，所以即证$f(x_2)<f(-x_2)$.

即证$f(x_2)-f(-x_2)<0$. (10分)

设$g(x)=f(x)-f(-x)=e^x(1-x)-e^{-x}(1+x)$，$x>0$，

则$g'(x)=-x\left(e^x-\dfrac{1}{e^x}\right)<0$在$x>0$时恒成立，

所以$g(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递减，所以$g(x)<g(0)=0$，

所以$g(x)=f(x)-f(-x)<0$，即$a+b>0$得证. (12分)

22. **解**：(1)由曲线C_1的参数方程为$\begin{cases}x=t-2,\\ y=t+2\end{cases}$($t$为参数)，可以消参得到直角坐标系下的普通方程为$y=x+4$； (2分)

由曲线C_2的极坐标方程为$\dfrac{2a}{\rho}=\dfrac{1}{\cos\theta}-\cos\theta$，利用转化公式，可得到直角坐标方程为$y^2=2ax(a>0,x\neq0)$. (4分)

(2)由题意可知，直线与抛物线没有交点.因而，抛物线上的点到直线的距离的最小值，即两条平行线之间的距离.所求直线与已知直线平行，与抛物线相切. (5分)

设所求直线方程为$y=x+c(c<4)$，联立直线与抛物线的方程$\begin{cases}y=x+c,\\ y^2=2ax,\end{cases}$得$x^2+2(c-a)x+c^2=0$， (7分)

令$\Delta=0$，即$4(c-a)^2-4c^2=0$，解得$c=\dfrac{a}{2}$， (8分)

此时两条平行线之间的距离为$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\left|\dfrac{a}{2}-4\right|}{\sqrt{2}}$， (9分)

解得$a=14$(舍去)或$a=2$. (10分)

23. **解**：(1)$f(x)=2x-1$，$g(x)=|f(x-1)|+\left|f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right|=|2x-3|+|x-1|$，

$g(x)=|2x-3|+|x-1|=\begin{cases}3x-4,x\geqslant\dfrac{3}{2},\\ 2-x,1<x<\dfrac{3}{2},\\ 4-3x,x\leqslant1,\end{cases}$ (2分)

分类讨论解不等式$g(x)>f(x)$，可得：

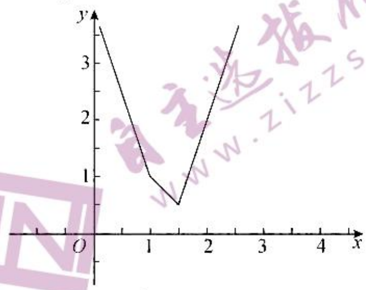
当$x\geqslant\dfrac{3}{2}$时，$3x-4>2x-1$，解得$x>3$；

当$1<x<\dfrac{3}{2}$时，$2-x>2x-1$，无解；

当$x\leqslant1$时，$4-3x>2x-1$，解得$x<1$. (4分)

综上所述，原不等式的解集为$\{x|x<1或x>3\}$. (5分)

(2)作出函数$g(x)$的图象如图，



由图象可知，$g(x)\geqslant\dfrac{1}{2}$恒成立， (7分)

令$h(t)=t^2-2t+m=(t-1)^2+m-1\geqslant m-1$， (8分)

若对于任意的实数t，关于x的方程$g(x)-t^2+2t-m=0$恒有实数解，则只需$m-1\geqslant\dfrac{1}{2}$，即$m\geqslant\dfrac{3}{2}$. (10分)

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于中国拔尖人才培养的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户（官方网址：www.zizzs.com）、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承“专业、专注、有态度”的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+ 大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网 “年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的新高考拔尖人才培养服务平台。