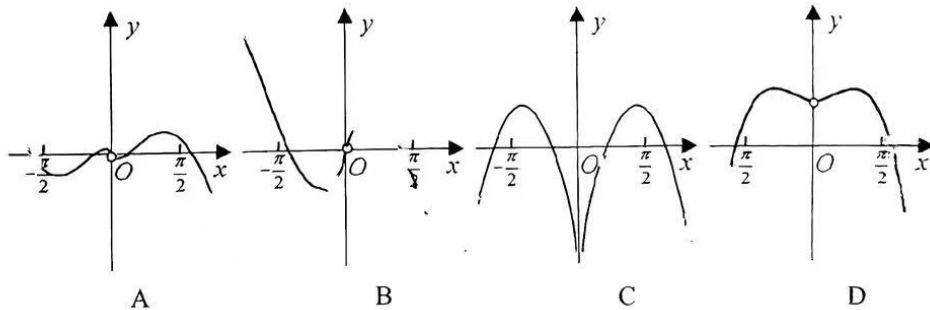


2023 年常德市高三年级模拟考试  
数 学

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

- 已知集合  $A = \{x | -1 < x < 3\}$ ,  $B = \{x | x^2 - 5x + 4 < 0\}$ , 则  $A \cup B =$   
A.  $\{x | 1 < x < 3\}$                                       B.  $\{x | 1 < x < 4\}$   
C.  $\{x | -1 < x < 3\}$                                       D.  $\{x | -1 < x < 4\}$
- 已知复数  $z$  满足  $z(2+i) = a+i$  (其中  $a > 0$ ,  $i$  为虚数单位), 若复数  $z$  的模为  $\sqrt{2}$ , 则实数  $a =$   
A. 1                                      B. 2                                      C. 3                                      D. 4
- 已知向量  $a$  为单位向量, 向量  $b = (1, 1)$ ,  $(a + b) \cdot (2a - b) = 1$ , 则向量  $a$  与向量  $b$  的夹角为  
A.  $\frac{\pi}{6}$                                       B.  $\frac{\pi}{4}$                                       C.  $\frac{\pi}{3}$                                       D.  $\frac{\pi}{2}$
- 已知抛物线的方程为  $x^2 = 4y$ , 过其焦点  $F$  的直线与抛物线交于  $M$ 、 $N$  两点, 且  $|MF| = 5$ ,  $O$  为坐标原点, 则  $\triangle MOF$  的面积与  $\triangle NOF$  的面积之比为  
A.  $\frac{1}{5}$                                       B.  $\frac{1}{4}$                                       C. 5                                      D. 4
- 函数  $f(x) = x \cos x + (\sin x) \ln |x|$  的部分图像大致为



- 将函数  $f(x) = 2 \sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$  ( $\omega > 0$ ) 的图像向左平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位, 得到函数  $y = g(x)$  的图像, 若函数  $y = g(x)$  的一个极值点是  $\frac{\pi}{6}$ , 且在  $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}]$  上单调递增, 则  $\omega$  的值为  
A.  $\frac{2}{3}$                                       B.  $\frac{4}{3}$                                       C.  $\frac{8}{3}$                                       D.  $\frac{16}{3}$
- 已知椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ), 直线  $y = \frac{1}{2}x + a$  与椭圆  $E$  相切, 则椭圆  $E$  的离心率为  
A.  $\frac{1}{4}$                                       B.  $\frac{1}{2}$                                       C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                                       D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $R$ , 若函数  $f(2x+1)$  为奇函数, 且  $f(4-x)=f(x)$ ,

$$\sum_{k=1}^{2023} f(k) = 1, \text{ 则 } f(0) =$$

- A. -1                      B. 0                      C. 1                      D. 2

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 以下说法正确的是

- A. 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97 的第 75 百分位数为 95  
 B. 具有相关关系的两个变量  $x, y$  的一组观测数据  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ , 由此得到的线性回归方程为  $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ , 回归直线  $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$  至少经过点  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  中的一个点  
 C. 相关系数  $r$  的绝对值越接近于 1, 两个随机变量的线性相关性越强  
 D. 已知随机事件  $A, B$  满足  $P(A) > 0, P(B) > 0$ , 且  $P(B|A) = P(B)$ , 则事件  $A$  与  $B$  不互斥

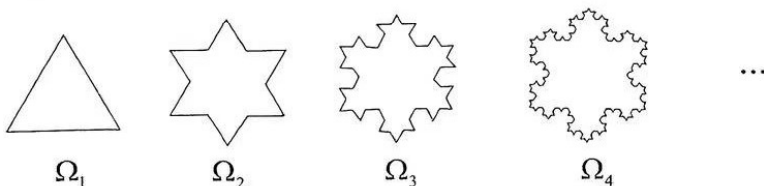
已知平面  $\alpha, \beta$ , 直线  $l, m$ , 则下列命题正确的是

- A. 若  $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = m, l \perp m, l \subset \alpha$ , 则  $l \perp \beta$   
 B. 若  $\alpha \parallel \beta, l \subset \alpha, m \subset \beta$ , 则  $l \parallel m$   
 C. 若  $m \subset \alpha$ , 则“ $l \perp \alpha$ ”是“ $l \perp m$ ”的充分不必要条件  
 D. 若  $m \subset \alpha, l \not\subset \alpha$ , 则“ $l \parallel \alpha$ ”是“ $l \parallel m$ ”的必要不充分条件

已知圆  $C: (x-a)^2 + y^2 = a^2 (a > 0)$  与圆  $M: x^2 + (y-4)^2 = 4$ ,  $P, Q$  分别为圆  $C$  和圆  $M$  上的动点, 下列说法正确的是

- A. 过点  $(2, 1)$  作圆  $M$  的切线有且仅有一条  
 B. 存在实数  $a$ , 使得圆  $C$  和圆  $M$  恰有一条公切线  
 C. 若圆  $C$  和圆  $M$  恰有 3 条公切线, 则  $a = 3$   
 D. 若  $|PQ|$  的最小值为 1, 则  $a = 1$

12. 如图, 有一列曲线  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n, \dots$ , 且  $\Omega_1$  是边长为 1 的等边三角形,  $\Omega_{i+1}$  是对  $\Omega_i (i=1, 2, \dots)$  进行如下操作而得到: 将曲线  $\Omega_i$  的每条边进行三等分, 以每边中间部分的线段为边, 向外作等边三角形, 再将中间部分的线段去掉得到  $\Omega_{i+1}$ , 记曲线  $\Omega_n (n=1, 2, \dots)$  的边数为  $L_n$ , 周长为  $C_n$ , 围成的面积为  $S_n$ , 则下列说法正确的是



- A. 数列  $\{L_n\}$  是首项为 3, 公比为 4 的等比数列  
 B. 数列  $\{C_n\}$  是首项为 3, 公比为  $\frac{4}{3}$  的等比数列  
 C. 数列  $\{S_n\}$  是首项为  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ , 公比为  $\frac{4}{3}$  的等比数列  
 D. 当  $n$  无限增大时,  $S_n$  趋近于定值  $\frac{2\sqrt{3}}{5}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 函数  $f(x) = \ln(x+1) + e^x$  在  $x=0$  处的切线方程为\_\_\_\_\_.
14. 在学雷锋志愿活动中，安排 4 名志愿者完成 5 项工作，每人至少完成一项，每项工作由一人完成，则不同的安排方式共有\_\_\_\_\_种.
15. 在长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中， $AB = 2$ ， $BC = 1$ ，点  $P$  为长方体表面上的动点，且  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$ ，当  $CP$  最小时， $\triangle ABP$  的面积为\_\_\_\_\_.
16. 已知不等式  $\ln(x+a) \leq e^x - a$  对  $\forall x \in [1, +\infty)$  恒成立，则  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

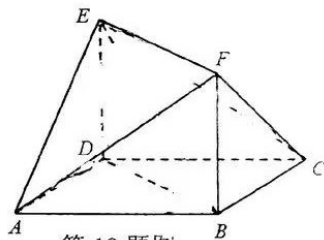
已知数列  $\{a_n\}$  满足  $\frac{a_1}{4} + \frac{a_2}{4^2} + \dots + \frac{a_n}{4^n} = \frac{n}{4^n} (n \in \mathbb{N}^*)$ .

- (1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;
- (2) 若数列  $\{b_n\}$  满足  $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ ，求  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

18. (本小题满分 12 分)

如图，在多面体  $ABCDEF$  中，底面  $ABCD$  是边长为 2 的正方形， $DE \perp$  平面  $ABCD$ ，四边形  $BDEF$  为矩形.

- (1) 若  $DE = \sqrt{2}$ ，证明：平面  $AEF \perp$  平面  $CEF$ ;
- (2) 若四棱锥  $F - EBC$  的体积为 2，求平面  $EBC$  与平面  $AEF$  的夹角的余弦值.

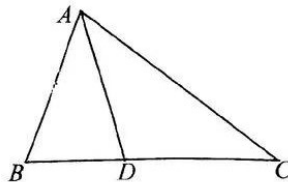


第 18 题图

19. (本小题满分 12 分)

如图，在  $\triangle ABC$  中，已知角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ ，角  $A$  的平分线交  $BC$  于点  $D$ ，且  $AD=1$ ， $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \sqrt{3}$ .

- (1) 求  $\angle BAD$  的大小;
- (2) 若  $BD \cdot CD = \frac{1}{3}$ ，求  $\triangle ABC$  的面积.



第 19 题图

20. (本小题满分 12 分)

某水表制造有限公司，是一家十分优质的水表制造公司，该公司有 3 条水表表盘生产线。

- (1) 某检验员每天从其中的一条水表表盘生产线上随机抽取 100 个表盘进行检测，根据长期生产经验，可以认为该条生产线正常状态下生产的水表表盘尺寸服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ 。记  $X$  表示一天内抽取的 100 个表盘中其尺寸在  $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$  之外的个数，求  $P(X \geq 1)$  及  $X$  的数学期望；
- (2) 该公司的 3 条水表表盘生产线其次品率和生产的表盘所占比例如下表：

生产线编号	次品率	所占比例
1	0.02	35%
2	0.01	50%
3	0.04	15%

现从所生产的表盘中随机抽取一只，若已知取到的是次品，试求该次品分别由三条生产线所生产的概率，并分析该次品来自哪条生产线的可能性最大(用频率代替概率)。

附：若随机变量  $Z$  服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ ，则  $P(\mu - 3\sigma < Z < \mu + 3\sigma) = 0.9973$ ，

$$0.9973^{100} \approx 0.7631.$$

21. (本小题满分 12 分)

已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的右顶点到渐近线的距离为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，虚轴长为  $2\sqrt{3}$ ，过双曲线  $C$  的右焦点  $F$  作直线  $MN$  (不与  $x$  轴重合) 与双曲线  $C$  相交于  $M, N$  两点，过点  $M$  作直线  $l: x = t (-a < t < a)$  的垂线  $ME$ ， $E$  为垂足。

- (1) 求双曲线  $C$  的标准方程；
- (2) 是否存在实数  $t$ ，使得直线  $EN$  过  $x$  轴上的定点  $P$ ，若存在，求  $t$  的值及定点  $P$  的坐标；若不存在，说明理由。

22. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = \ln x + \frac{a}{x+1} - 2a (a \in \mathbb{R})$ 。

- (1) 讨论函数  $f(x)$  的单调性；
- (2) 若  $f(x)$  有两个极值点  $x_1, x_2$ ，且  $x_1 \in [e, e^2]$ ，求  $f(x_1) - f(x_2)$  的取值范围。

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线