长郡中学
师大附中联考联合体2020年高三12月联考
长沙一中

数　　学

时量：120分钟 满分：150 分

得分________

一、单项选择题(本题共8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求．)

1. 设集合$A=\{x\,|x^2-x-2>0\}$,$B=\{x\,|0<x<3\}$, 则$A\cap B=$

A. (0,2)　　B.(1,2)　　C. 0,3)　　D. (2,3)

2. 若 $\dfrac{a-\mathrm{i}}{3+2\mathrm{i}}$ 为纯虚数，则实数a 的值为

A. $-\dfrac{3}{2}$　　B. $-\dfrac{2}{3}$　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{3}{2}$

3. 平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$,$|\boldsymbol{b}|=3$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-6$，则向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦值为

A. $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　C. $\dfrac{1}{5}$　　D. $\dfrac{4}{5}$

4. 《易经》是中国文化中的精髓，右图是易经八卦图(含乾、坤、巽、震、坎、离、艮、兑八卦)，每一卦由三根线组成(——表示一根阳线，— —表示一根阴线)，从八卦中任取一卦，这一卦的三根线中恰有 1 根阳线和 2 根阴线的概率为

A. $\dfrac{1}{8}$　　B. $\dfrac{1}{4}$

C. $\dfrac{3}{8}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

5. 已知两个变量具备线性相关性，现通过最小二乘法求回归直线方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，将已知数据代入公式 $Q=\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-bx_i-a)^2$ 计算后得到的代数式为：$3a^2+13b^2+12ab-2b+3$，使上述代数式取值最小的a , b 的值即为回归方程的系数，则回归直线方程为

A $\hat{y}=-x+2$　　B. $\hat{y}=-x-2$

C. $\hat{y}=x+2$　　D. $\hat{y}=x-2$

6. 某单位有 6 名员工，2020 年国庆节期间，决定从 6人中留 2人值班，另外 4人分别去张

家界、南岳衡山、凤凰古城、岳阳楼旅游．要求每个景点有 1 人游览，每个人只游览一个景点，且这 6 个人中甲、乙不去衡山，则不同的选择方案共有

A. 120 种　　B. 180 种　　C. 240 种　　D. 320 种

7. 已知数列$\{a_n\}$前 n 项和为S_n，命题p：$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，命题$q$：$\{a_n\}$为等差数列，则$p$是$q$成立的

A.充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

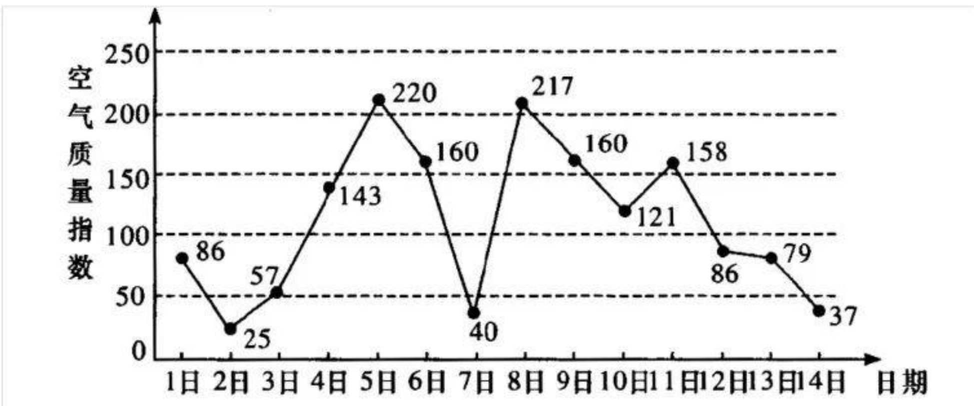
C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. 已知 $A.B$ 分别为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的左、右顶点，P为椭圆 C上一动点，PA,PB与直线$x=3$ 交于 M,N 两点，$\triangle PMN$ 与$\triangle PAB$的外接圆的周长分别为L_1,L_2，则$\dfrac{L_1}{L_2}$的最小值为

A.$\dfrac{\sqrt{5}}{4}$　　B.$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　　C.$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　D.$\dfrac{1}{4}$

二、多项选择题(本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得3分，有选错的得0分．)

9. 空气质量指数大小分为五级．指数越大说明污染的情况越严重，对人体危害越大．指数范围在：[0, 50]，[51, 100]，[101, 200]，[201, 300]，[301, 500]分别对应“优”、“良”、“轻(中)度污染”、“中度(重)污染”、“重污染”五个等级．下面是某市连续 14 天的空气质量指数趋势图，下列说法正确的有



A. 这14天中有 4 天空气质量指数为“良”

B. 这 14天中空气质量指数的中位数是 103

C. 从 2 日到 5日空气质量越来越差

D. 连续三天中空气质量指数方差最小的是 9日到 11日

10.设动点 P 在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$上(含内部)，且$\overrightarrow{D_1P}=\lambda\overrightarrow{D_1B}$，当$\angle APC$为锐角时，实数$\lambda$可能的取值是

A.$\frac{1}{2}$　　B.$\frac{1}{3}$

C.$\frac{1}{4}$　　D.$\frac{1}{5}$

11.在ΔABC中，下列说法正确的是

A.若 $A>B$, 则 $\sin A>\sin B$

B. 存在△ABC满 足$\cos A+\cos B\leq 0$

C.若 $\sin A<\cos B$, 则△ABC为钝角三角形

D.若$C>\frac{\pi}{2}$，则$\sin C>\sin^2 A+\sin^2 B$

12.已知$a>0, m(x)=e^{x-2}-e^{2-x}, f(x)=am(x)-\sin\pi x$，若$f(x)$存在唯一零点，下列说法正确的有

A..$m(x)$在 $\mathbf{R}$上递增

B. $m(x)$图象关于点(2 . 0)中心对称

C. 任取不相等的实数$x_1,x_2\in\mathbf{R}$ 均有 $\frac{m(x_1)+m(x_2)}{2}<m(\frac{x_1+x_2}{2})$

D. $a\geqslant\frac{\pi}{2}$

三 填空题(本题共 4 小题，每小题 5 分，共20 分．)

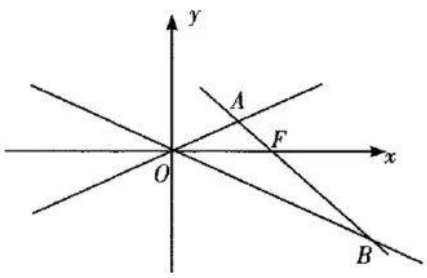
13.已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x, x>0,\\ 2^{-x}+2, x\leqslant 0,\end{cases}$，则 $f(f(\frac{1}{2}))=$____________.

! Z-'· + 2 ,.r O ,

14. 某圆锥母线长为4，其侧面展开图 为半圆面，则该圆锥高为__________.

15.已知三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为 100π，$PB\perp$平面ABC, $PB=8$，$\angle HAC=120^\circ$, 则三棱锥体积的最大值为______________.

16.如图，已知F为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点，过点$F$的直线交两渐近线于$A$，$B$ 两点．若$\angle AOB=120^\circ$，△OAB内切圆的半径$r=\frac{\sqrt{3}a-b}{5}$，则双曲线的离心率为______.



四、解答题(本题共 6 小题．共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．)

17. (本题满分 10 分)

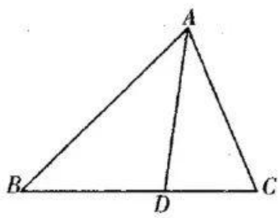
在① $S_n+S_{n-2}=2(S_{n-1}+1)$；② $S_{n+1}+2=S_{n+2}-a_{n+1}$；③ $\frac{S_n}{n}=a_{n+1}-(n+1)$ 这三个条件中任选一个，补充在下面的问题中，并解答该问题．

问题：已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, $a_1=1$，____________，若确定 $\{a_n\}$ 是等差数列，求 $\{a_n\}$ 的通项公式，否则，说明理由．

(注：如果选择多个条件分别解答．按第一个解答计分)

18. (本题满分 12 分)

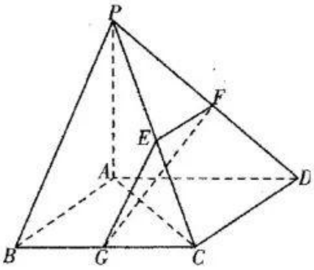
在△ABC 中，$\angle B=\frac{\pi}{3}$，$AB=15$，点 D 在边 BC 上，$CD=1$, $\cos\angle ADC=\frac{1}{26}$.



(1) 求 $\sin\angle BAD$;

(2) 求△ABC 的面积.

19. (本题满分 12 分)



四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为2 的菱形，$\angle BAD=120°$, $PA\perp$底面$ABCD$,$PA=2\sqrt{3}$，E , F分别是PC,PD 的中点.

(1) 已知 $\overrightarrow{BG}=\lambda\overrightarrow{BC}$, 若平面 EFG//平面PAB,求λ的值;

(2) 在(1)的条件下，求平面 EFG 与平面PCD 所成二面角的正弦值.

20. (本题满分 12 分)

已知 A , B 分别 椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点，过点 $M(2,0)$任作一条非水平直线交椭圆于 P , Q 两点，若椭圆长轴长为 8, 且过点 $(3,\dfrac{3\sqrt{7}}{4})$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 记直线 AP , BQ 的斜率分别为k_1，k_2，则 $\dfrac{k_1}{k_2}$ 是否为定值，若是，求出该定值．若不是，请说明理由.

联考联合体2020年高三12月联考

数学参考答案

一、单项选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	B	C	D	C	C	A

1. D 【解析】$A=\{x|x>2$ 或 $x<-1\}$，则 $A\cap B=(2,3)$.

2. C 【解析】$\frac{a-i}{3+2i}=\frac{(a-i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{(3a-2)-(2a+3)i}{13}$，则 $\begin{cases}3a-2=0,\\-(2a+3)\neq 0,\end{cases}$ 所以 $a=\frac{2}{3}$.

3. B 【解析】$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{-6}{\sqrt{5}\times 3}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

4. C 【解析】$p=\frac{m}{n}=\frac{3}{8}$.

5. D 【解析】$3a^2+13b^2+12ab-2b+3=3(a+2b)^2+(b-1)^2+2$，

当 $\begin{cases}a+2b=0,\\b-1=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=-2,\\b=1\end{cases}$ 时上式最小，故 $\hat{y}=x-2$.

6. C 【解析】方法1：以人为对象，分类讨论：甲不值班乙值班：$C_4^3C_3^1A_3^3=72$；甲值班乙不值班：$C_4^3C_3^1A_3^3=72$；

甲乙都不值班：$C_4^2C_2^1A_3^3=72$；甲乙都值班：$A_4^4=24$，故 $N=72+72+72+24=240$；

方法2：以地点为对象，依次考虑各景点可能人数：$N=4\times 5\times 4\times 3=240$.

7. C 【解析】若 p 成立，则 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$，则 $S_{n+1}=\frac{(n+1)(a_1+a_{n+1})}{2}$，

两式相减得：$a_{n+1}=\frac{(n+1)(a_1+a_{n+1})}{2}-\frac{n(a_1+a_n)}{2}$，即 $(n-1)a_{n+1}-na_n+a_1=0$，

于是：$na_{n+2}-(n+1)a_{n+1}+a_1=0$，再将以上两式相减得：$na_{n+2}-2na_{n+1}+na_n=0$，

即 $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0$，所以 $\{a_n\}$ 为等差数列，故命题 q 成立；而 q 成立，p 显然成立.

8. A 【解析】容易知道 $k_{PA}\cdot k_{PB}=-\frac{1}{4}$，设 $l_{PA}:y=k(x+2)$，$l_{PB}:y=-\frac{1}{4k}(x-2)$，令 $x=3$ 得 $y_M=5k$，$y_N=-\frac{1}{4k}$，不妨设 $k>0$，则 $MN=5k+\frac{1}{4k}$，设△PMN 和△PAB 外接圆的半径分别为 r_1，r_2，由正弦定理得：$2r_1=\frac{MN}{\sin\angle MPN}$，$2r_2=\frac{AB}{\sin\angle APB}$，又 $\angle MPN+\angle APB=180^\circ$，所以：$\frac{L_1}{L_2}=\frac{2\pi r_1}{2\pi r_2}=\frac{r_1}{r_2}=\frac{MN}{AB}=\frac{5k+\frac{1}{4k}}{4}\geqslant\frac{2\sqrt{5k\cdot\frac{1}{4k}}}{4}=\frac{\sqrt{5}}{4}$.

二、多项选择题

题号	9	10	11	12
答案	ACD	CD	ACD	ABD

9. ACD 【解析】14天中有：1日，3日，12日，13日空气质量指数为良，共4天，故A对；

14天中的中位数为：$\frac{86+121}{2}=103.5$，故B错；

从2日到5日空气质量指数越来越高，故空气质量越来越差，故C对；D答案显然成立.

10. CD 【解析】设 $AP=x$，$D_1P=t$，设正方体的棱长为 1，则 $AC=\sqrt{2}$，在 $\triangle APC$ 中，由余弦定理得

$\cos\angle APC=\dfrac{x^2+x^2-2}{2x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$，若 $\angle APC$ 为锐角，则 $\dfrac{x^2-1}{x^2}>0$，则 $x^2>1$，

在 $\triangle AD_1P$ 中，$AD_1=\sqrt{2}$，$\cos\angle AD_1P=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，于是由余弦定理得

$x^2=2+t^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot t\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，于是 $2+t^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot t\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{3}>1$，即 $3t^2-4\sqrt{3}t+3>0$，

解之得：$t>\sqrt{3}$ 或 $t<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，由 $D_1B=\sqrt{3}$，故 $\lambda>1$（舍）或 $0<\lambda<\dfrac{1}{3}$.

11. ACD 【解析】对于 A 选项，若 $A>B$ 则 $a>b$，则 $2R\sin A>2R\sin B$，即 $\sin A>\sin B$，故 A 选项正确；

对于 B 选项，由 $A+B<\pi$，则 $A<\pi-B$，于是 $\cos A>-\cos B$，即 $\cos A+\cos B>0$，故 B 选项错误；

对于 C 选项，由 $\sin A<\cos B$ 得 $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-A\right)<\cos B$，此时：若 $0<A<\dfrac{\pi}{2}$，则 $\dfrac{\pi}{2}-A>B$，则 $A+B<\dfrac{\pi}{2}$，于是 $C>\dfrac{\pi}{2}$；若 $A>\dfrac{\pi}{2}$，则 $\cos\left(A-\dfrac{\pi}{2}\right)<\cos B$，则 $A-\dfrac{\pi}{2}>B$，于是 $A>\dfrac{\pi}{2}+B$，故 C 选项正确；

对于 D 选项，由 $C>\dfrac{\pi}{2}$，则 $A+B<\dfrac{\pi}{2}$，则 $0<A<\dfrac{\pi}{2}-B<\dfrac{\pi}{2}$，于是 $\sin A<\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-B\right)$，

即 $0<\sin A<\cos B$，同理 $0<\sin B<\cos A$，

此时 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B>\sin A\cdot\sin A+\sin B\cdot\sin B=\sin^2A+\sin^2B$. 所以 D 选项正确.

12. ABD 【解析】由 $m'(x)=e^{x-2}+e^{2-x}>0$ 知 $m(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上递增，故 A 选项正确；

$m(x)+m(4-x)=e^{x-2}-e^{2-x}+e^{2-x}-e^{x-2}=0$，故 $m(x)$ 图象关于点 $(2,0)$ 中心对称，故 B 选项正确；

由 $m''(x)=e^{x-2}-e^{2-x}$，当 $x>2$ 时，$m''(x)>0$，$m'(x)$ 递增，$m(x)$ 图象下凸，此时 $\dfrac{m(x_1)+m(x_2)}{2}>m\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$，故 C 选项错误；

对于 D 选项：

解法 1：$f(x)=a(e^{x-2}-e^{2-x})-\sin\pi x$，注意到 $f(2-x)=-f(2+x)$，故 $f(x)$ 的图象关于点 $(2,0)$ 中心对称，而 $f(2)=0$，则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有唯一零点等价于 $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 无零点，

$f'(x)=a(e^{x-2}+e^{2-x})-\pi\cos\pi x$，

当 $a\geqslant\dfrac{\pi}{2}$ 时，因为 $e^{x-2}+e^{2-x}\geqslant 2$，则 $f'(x)\geqslant 2a-\pi\cos\pi x\geqslant 2a-\pi\geqslant 0$，

于是 $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 递增，于是当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f(x)>f(2)=0$，满足题意；

当 $a<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f'(2)=2a-\pi<0$，由连续函数的性质可知，一定存在 $x_0>2$，使得 $x\in(2,x_0)$ 时 $f'(x)<0$，

则 $f(x)$ 在 $(2,x_0)$ 单调递减，于是 $x\in(2,x_0)$ 时 $f(x)<f(2)=0$，

而 $a<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\dfrac{\pi}{a}>2$，$\dfrac{a^2}{\pi}<\dfrac{\pi}{4}$，$2+\ln\dfrac{\pi}{a}>2$，

$f\left(2+\ln\dfrac{\pi}{a}\right)=a\left(e^{\ln\frac{\pi}{a}}-e^{-\ln\frac{\pi}{a}}\right)-\sin\left(2\pi+\pi\ln\dfrac{\pi}{a}\right)=a\left(\dfrac{\pi}{a}-\dfrac{a}{\pi}\right)-\sin\left(\pi\ln\dfrac{\pi}{a}\right)$

$\geqslant\pi-\dfrac{a^2}{\pi}-1>\pi-\dfrac{\pi}{4}-1>0$，

由零点存在定理，在区间 $\left(2,2+\ln\dfrac{\pi}{a}\right)$ 上 $f(x)$ 一定还存在零点，与已知矛盾.

故 $a\geqslant\frac{\pi}{2}$.

解法 2：若 $f(x)$ 存在唯一零点，则 $a(e^{x-2}-e^{2-x})=\sin\pi x$ 只有一个解，即 $g(x)=a(e^{x-2}-e^{2-x})$ 与 $h(x)=\sin\pi x$ 只有一个交点，$g'(x)=a(e^{x-2}+e^{2-x})$，$h'(x)=\pi\cos\pi x$，由 $g(2)=h(2)=0$，$g(x)$、$h(x)$ 的图象均关于点 $(2,0)$ 中心对称，在 $x=2$ 的右侧附近，$g(x)$ 为下凸函数，$h(x)$ 为上凸函数，要 $x>2$ 时图象无交点，当且仅当 $g'(2)\geqslant h'(2)$ 成立，于是 $2a\geqslant\pi$，即 $a\geqslant\frac{\pi}{2}$，故 D 选项正确.

三、填空题

13. 4 **【解析】**$f\left(\frac{1}{2}\right)=\log_2\frac{1}{2}=-1$，$f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f(-1)=2^{-(-1)}+2=4$.

14. $2\sqrt{3}$ **【解析】**圆锥底面半径 $r=2$，$h=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$.

15. $6\sqrt{3}$ **【解析】**设△ABC 三边的长分别为 a,b,c，$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}bc\sin120^\circ\cdot8=\frac{2\sqrt{3}}{3}bc$，设球的半径为 R，由 $4\pi R^2=100\pi$ 得 $R^2=25$，设△ABC 外接圆的半径为 r，由正弦定理得 $2r=\frac{a}{\sin120^\circ}$，即 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，$R^2=4^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2=25$，所以 $a=3\sqrt{3}$，$27=b^2+c^2-2bc\cdot\cos120^\circ$，即 $27=b^2+c^2+bc\geqslant2bc+bc=3bc$，故 $bc\leqslant9$，$V=\frac{2\sqrt{3}}{3}bc\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}\times9=6\sqrt{3}$，当且仅当 $b=c=3$ 时取等号.

16. $\frac{\sqrt{19}}{4}$ **【解析】**由焦点 F 到渐近线的距离为 b，$\angle OAB=120^\circ$ 知 $AF=\frac{2\sqrt{3}}{3}b$，

在△OAF 中，由余弦定理得 $OF^2=OA^2+AF^2-2\cdot OA\cdot AF\cdot\cos120^\circ$，

即 $c^2=OA^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}b\right)^2-2\cdot OA\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}b\cdot\cos120^\circ$，解之得：$OA=a-\frac{\sqrt{3}}{3}b$.

设△OAB 内心为 M，作 $MN\perp OA$ 于 N，显然 $\angle MAO=60^\circ$，$MN=r=\frac{\sqrt{3}a-b}{5}$，

则 $AN=\frac{\sqrt{3}}{3}MN=\frac{3a-\sqrt{3}b}{15}$，则 $ON=OA-AN=a-\frac{\sqrt{3}}{3}b-\frac{3a-\sqrt{3}b}{15}=\frac{12a-4\sqrt{3}b}{15}$，

$\tan\angle MON=\frac{MN}{ON}=\frac{\frac{\sqrt{3}a-b}{5}}{\frac{12a-4\sqrt{3}b}{15}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，即 $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，$e=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{19}}{4}$.

四、解答题

17.**【解析】**若选①，由 $S_n+S_{n-2}=2(S_{n-1}+1)$ 成立，则必须 $n\geqslant3$， ……………… 2 分

此时 $S_n-S_{n-1}=S_{n-1}-S_{n-2}+2$，即 $a_n=a_{n-1}+2(n\geqslant3)$， ……………… 5 分

这只能说明数列 $\{a_n\}$ 从第 2 项开始构成等差数列， ……………… 8 分

数列通项公式无法确定. ……………… 10 分

若选②，由 $S_{n+1}+2=S_{n+2}-a_{n+1}$，得 $S_{n+2}-S_{n+1}-a_{n+1}=2$，即 $a_{n+2}-a_{n+1}=2$， ……………… 2 分

即 $a_{n+1}-a_n=2(n\geqslant2)$， ……………… 5 分

这只能说明数列 $\{a_n\}$ 从第 2 项开始构成等差数列， ……………… 8 分

数列通项公式无法确定. ……………… 10 分

若选③，由 $\frac{S_n}{n}=a_{n+1}-(n+1)$ 得 $S_n=na_{n+1}-n(n+1)$，

于是 $S_{n+1}=(n+1)a_{n+2}-(n+1)(n+2)$，两式相减得：$(n+1)a_{n+1}=(n+1)a_{n+2}-2(n+1)$， ………… 2 分

即 $a_{n+2}=a_{n+1}+2$， …………………………………………………………………… 5 分

对 $S_n=na_{n+1}-n(n+1)$，令 $n=1$ 得 $a_2=a_1+2$， ……………………………………………… 7 分

故数列 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列， …………………………………………………………… 8 分

即 $a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$. ……………………………………………………………… 10 分

18.【解析】(1) 由 $\cos\angle ADC=\frac{1}{26}$，知 $\sin\angle ADC=\sqrt{1-\left(\frac{1}{26}\right)^2}=\frac{15\sqrt{3}}{26}$， …………………………………… 2 分

则 $\sin\angle BAD=\sin(\angle ADC-60^\circ)=\sin\angle ADC\cdot\cos 60^\circ-\cos\angle ADC\cdot\sin 60^\circ$ ………………………… 3 分

$=\frac{15\sqrt{3}}{26}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{26}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{7\sqrt{3}}{26}$. …………………………………………………………… 5 分

(2) 在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理得：$\frac{BD}{\sin\angle BAD}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$，即 $\frac{BD}{\frac{7\sqrt{3}}{26}}=\frac{15}{\frac{15\sqrt{3}}{26}}$， ………………………………… 7 分

即 $BD=7$， ……………………………………………………………………………… 8 分

所以 $BC=7+1=8$，

于是 $S=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABD$ ……………………………………………………… 10 分

$=\frac{1}{2}\times 15\times 8\times\sin 60^\circ=30\sqrt{3}$. ………………………………………………………… 12 分

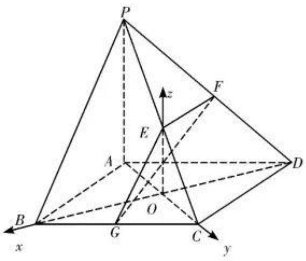
19.【解析】(1) 若平面 EFG // 平面 PAB，平面 $PAB\cap$ 平面 $PBC=PB$，平面 $EFG\cap$ 平面 $PBC=EG$，

由面面平行的性质定理可知：$PB\,//\,EG$， ……………………………………………………… 2 分

于是 $\frac{CG}{GB}=\frac{CE}{EP}$，由 E 为 PC 的中点知：G 为 BC 的中点，故 $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，

所以 $\lambda=\frac{1}{2}$. ………………………………………………………………………… 4 分

(2) 由平面 EFG // 平面 PAB 知，平面 EFG 与平面 PCD 所成二面角即为平面 PAB 与平面 PCD 所成二面角. 连接 BD，交 AC 于点 O，因为四边形 $ABCD$ 为菱形，则 $AC\perp BD$，以点 O 为坐标原点，以 OB、OC 所在的直线分别为 x 轴，y 轴，过点 O 与底面 $ABCD$ 垂直的直线为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系， ……………………………………………… 6 分



则 $A(0,-1,0)$，$B(\sqrt{3},0,0)$，$C(0,1,0)$，$D(-\sqrt{3},0,0)$，$P(0,-1,2\sqrt{3})$，

于是 $\overrightarrow{AP}=(0,0,2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{CP}=(0,-2,2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CD}=(-\sqrt{3},-1,0)$，设平面 PAB 的法向量为

$\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$，由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AP}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AB}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2\sqrt{3}z=0,\\ \sqrt{3}x+y=0,\end{cases}$

取 $x=1$，则 $y=-\sqrt{3}$，$z=0$，于是 $\boldsymbol{n}_1=(1,-\sqrt{3},0)$. ………………………………………… 8 分

同理可求得平面 PCD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(-1,\sqrt{3},1)$， …………………………………… 9 分

则 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{-1-3}{\sqrt{1+(-\sqrt{3})^2}\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2+1}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$， ………………………… 11 分

所以二面角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$. ……………………………………………………………… 12 分

20.【解析】由题意知：$\begin{cases}2a=8,\\ \dfrac{9}{a^2}+\dfrac{63}{16b^2}=1,\end{cases}$ ………………………… 2 分

解之得：$\begin{cases}a=4,\\ b=3,\end{cases}$ 故椭圆 C 的方程为：$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$. ………………………… 4 分

(2)设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，设直线 PQ 的方程为：$x=\lambda y+2$， ………………………… 5 分

由 $\begin{cases}x=\lambda y+2,\\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1\end{cases}$ 得 $(9\lambda^2+16)y^2+36\lambda y-108=0$，显然 $\Delta>0$， ………………………… 6 分

于是：$y_1+y_2=\dfrac{-36\lambda}{9\lambda^2+16}$，$y_1y_2=\dfrac{-108}{9\lambda^2+16}$， ………………………… 7 分

$\dfrac{k_1}{k_2}=\dfrac{y_1}{x_1+4}\cdot\dfrac{x_2-4}{y_2}=\dfrac{y_1(\lambda y_2-2)}{(\lambda y_1+6)y_2}=\dfrac{\lambda y_1y_2-2y_1}{\lambda y_1y_2+6y_2}$ ………………………… 8 分

$=\dfrac{\lambda y_1y_2-2(y_1+y_2)+2y_2}{\lambda y_1y_2+6y_2}$

$=\dfrac{\lambda\cdot\dfrac{-108}{9\lambda^2+16}-2\cdot\dfrac{-36\lambda}{9\lambda^2+16}+2y_2}{\lambda\cdot\dfrac{-108}{9\lambda^2+16}+6y_2}=\dfrac{-36\lambda+2y_2(9\lambda^2+16)}{-108\lambda+6y_2(9\lambda^2+16)}=\dfrac{1}{3}$. ………………………… 12 分

21.【解析】(1)设"三只小球恰在两个盒子中"为事件 A，则 $P(A)=\dfrac{C_3^1A_4^2}{4^3}=\dfrac{9}{16}$. ………………………… 3 分

(2)设"恰有两个球的编号与盒子编号不同"为事件 B，"三个球的编号与盒子的编号不同"为事件 C，则"至少有两个球的编号与所在盒子编号不同"为事件：$B+C$，

$P(B)=\dfrac{C_3^1(1+2)}{4^3}=\dfrac{9}{64}$， ………………………… 4 分

$P(C)=\dfrac{2+C_3^2\times3}{4^3}=\dfrac{11}{64}$， ………………………… 5 分

B 与 C 互斥，

故 $P(B+C)=P(B)+P(C)=\dfrac{9}{64}+\dfrac{11}{64}=\dfrac{5}{16}$. ………………………… 6 分

(3)$X=1,2,3,4$. ………………………… 7 分

$P(X=1)=\dfrac{1}{4^3}=\dfrac{1}{64}$； ………………………… 8 分

$P(X=2)=\dfrac{2^3-1}{4^3}=\dfrac{7}{64}$； ………………………… 9 分

$P(X=3)=\dfrac{3^3-2^3}{4^3}=\dfrac{19}{64}$； ………………………… 10 分

$P(X=4)=\dfrac{4^3-3^3}{4^3}=\dfrac{37}{64}$； ………………………… 11 分

故 $E(X)=1\times\dfrac{1}{64}+2\times\dfrac{7}{64}+3\times\dfrac{19}{64}+4\times\dfrac{37}{64}=\dfrac{55}{16}$. ………………………… 12 分

22.【解析】(1)$f'(x)=(2ae^x-1)(e^x+1)$， ………………………… 2 分

当 $a\leqslant0$ 时，$f(x)$ 在 **R** 上单调递减； ………………………… 3 分

当 $a>0$ 时，由 $f'(x)>0$ 得，$x>\ln\dfrac{1}{2a}$；由 $f'(x)<0$ 得，$x<\ln\dfrac{1}{2a}$.

故 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\ln\frac{1}{2a}\right)$ 递减，在 $\left(\ln\frac{1}{2a},+\infty\right)$ 递增. ……………………………………………… 4 分

(2) 由 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)\geqslant 0$ 得，$ae^{\pi}+(2a-1)e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}\geqslant 0$，$a(e^{\pi}+2e^{\frac{\pi}{2}})\geqslant e^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2}$，$\therefore a>0$. …………………………… 5 分

① 当 $a\geqslant\frac{1}{2}$ 时，由(1)知，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore f(x)\geqslant f(0)=3a-1\geqslant(3a-1)\cos x$，……… 6 分

② 当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，令 $g(x)=f(x)-(3a-1)\cos x$，

则 $g'(x)=2ae^{2x}+(2a-1)e^{x}-1+(3a-1)\sin x\geqslant f'(x)-|3a-1|$，

$g'(0)=4a-2<0$，$g(0)=0$，

当 $\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}$ 时，$g'(x)\geqslant f'(x)-|3a-1|=2ae^{2x}+(2a-1)e^{x}-3a$，

由 $2ae^{2x}+(2a-1)e^{x}-3a=0$ 得，$x=\ln\left(\frac{1-2a+\sqrt{28a^2-4a+1}}{4a}\right)>0$，

$\therefore x\geqslant\ln\frac{1-2a+\sqrt{28a^2-4a+1}}{4a}$ 时，$g'(x)\geqslant g'\left(\ln\frac{1-2a+\sqrt{28a^2-4a+1}}{4a}\right)\geqslant 0$，

从而，由零点存在定理知，存在 $x_0\in\left(0,\ln\frac{1-2a+\sqrt{28a^2-4a+1}}{4a}\right]$，使得 $g'(x_0)=0$.

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)<0$，此时，$g(x)\leqslant g(0)=0$，不合题意. ……………………………………………… 9 分

当 $0<a\leqslant\frac{1}{3}$ 时，$g'(x)\geqslant f'(x)-|3a-1|=2ae^{2x}+(2a-1)e^{x}+3a-2$，

由 $2ae^{2x}+(2a-1)e^{x}+3a-2=0$ 得，$x=\ln\left(\frac{1-2a+\sqrt{-20a^2+12a+1}}{4a}\right)>0$，

$\therefore x\geqslant\ln\frac{1-2a+\sqrt{-20a^2+12a+1}}{4a}$ 时，$g'(x)\geqslant g'\left(\ln\frac{1-2a+\sqrt{-20a^2+12a+1}}{4a}\right)\geqslant 0$，

从而，由零点存在定理知，存在 $x_1\in\left(0,\ln\frac{1-2a+\sqrt{-20a^2+12a+1}}{4a}\right]$，使得 $g'(x_1)=0$，

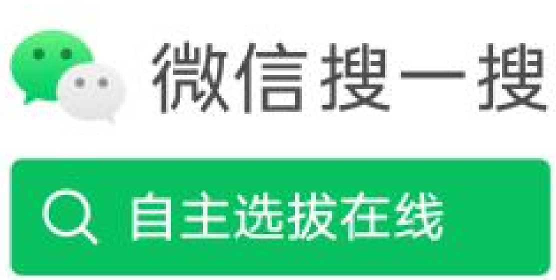
当 $x\in(0,x_1)$ 时，$g'(x)<0$，此时，$g(x)\leqslant g(0)=0$，不合题意. …………………………………………… 11 分

综上，$a\geqslant\frac{1}{2}$. …………………………………………………………………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》