2023 全国数学联赛山东省预赛试题

一、填空题（每小题 8 分，共 80 分）

1、已知 $A=\{x|\frac{1}{81}<3^{x-1}\le 3,x\in Z\}$，$B=\{x|\frac{x+2}{x-3}<0,x\in N\}$，则集合 $C=\{m|m=xy,x\in A,y\in B\}$ 的元素个数是______.

2、已知：$\frac{1-4\sin\alpha}{\tan\alpha}=\sqrt{3}$ $(\alpha\in(0,\frac{\pi}{2}))$，则 α 是______.

3、已知关于 x 的方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的三个非零实数根成等比数列，则 a^3c-b^3 的值是______.

4、正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $A_1B_1C_1D_1$ 内有一个动点 M，且 BM // 平面 AD_1C，则 $\tan\angle D_1MD$ 的最大值是________.

5、数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_{n+1}=1+\frac{2}{a_n}(n=1,2,\cdots)$，那么 $a_n=$______.

6、已知 $x,y,z>0$，则 $f=\frac{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+4z^2}+\sqrt{z^2+16x^2}}{9x+3y+5z}$ 的最小值是________.

7、设 ΔABC 的内心为 I，而且满足 $2\overrightarrow{IA}+5\overrightarrow{IB}+6\overrightarrow{IC}=\vec{0}$，则 $\cos\angle B$ 的值是______.

8、已知双曲线 H：$x^2-y^2=1$ 上第一象限内一点 M，过 M 的作 H 的切线 l，与双曲线 H 切于 M，交 H 的渐近线于 P，Q 两点（P 在第一象限），R 与 Q 在同一渐近线上.则 $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}$ 的最小值为_________.

9、小张参加一次十道选择题的测试，做对一道得一分，做错一道扣一分，不做得零分．他的目标是至少得 7 分，7 分及格．小张现在确定他前六道题的答案是正确的，而剩下的每道题做对的概率为 $\frac{1}{2}$，小张应该做______多少道题，及格的概率最大.

10、设实数 x,y 使得 $x-y$，x^2-y^2，x^3-y^3 均为素数，则 $x-y$ 的值是______.

二、解答题（共 70 分）

11、（本题 15 分）

已知：O 是 ΔABC 的外心，D,E 分别是边 AC,AB 上的点．线段 DE,BD,CE 的中点分别为 P,Q,R .$OH\perp DE$ 垂足为 H .求证：P，Q，R，H 四点共圆.

12、（本题 15 分）

在区间 $(2^{2n},2^{3n})$ 中任取 $2^{2n-1}+1$ 个奇数.求证：在所取出的数中，必有两个数，其中一个数的平方不能被另一个数整除.

13、（本题 20 分）

已知：a,b,c 为正实数.证明：$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 9(ab+bc+ca)$.

14、（本题 20 分）

10×10 的表格上填入 1 到 100，第 i 行第 j 列填入 $10(i-1)+j$.每次操作如下：取一个格子，或者将此格数字减少 2，将两个相对的邻格同时加 1；或者将此格数字增加 2，将两个相对的邻格同时减 1.
证明：如果经过一些步骤后表格中又得到 1 到 100 的数字，则它们是按原来的顺序排列的.

2023 全国数学联赛山东省预赛试题（答案）

一、填空题（每小题 8 分，共 80 分）

1、已知 $A=\{x\mid \frac{1}{81}<3^{x-1}\le 3, x\in Z\}$，$B=\{x\mid \frac{x+2}{x-3}<0, x\in N\}$，则集合 $C=\{m\mid m=xy, x\in A, y\in B\}$ 的元素个数是______

答案：7

解析：由已知得 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$，$B=\{0,1,2\}$，所以 $C=\{-4,-2,-1,0,1,2,4\}$

2、已知：$\frac{1-4\sin\alpha}{\tan\alpha}=\sqrt{3}$ $(\alpha\in(0,\frac{\pi}{2}))$，则 α 是______

答案：$\frac{\pi}{18}$

解析：由已知得 $2\sin 2\alpha=2\sin(\frac{\pi}{6}-\alpha)$，所以易得 $\alpha=\frac{\pi}{18}$

3、已知关于 x 的方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的三个非零实数根成等比数列，则 a^3c-b^3 的值是______

答案：0

解析：设这三个根是 d,dq,dq^2，则由韦达定理得

$$\begin{cases} d+dq+dq^2=-a \\ d^2q+d^2q^2+d^2q^3=b \\ d^3q^3=-c \end{cases}$$

整理得 $(-\frac{b}{a})^3=-c$，所以 $a^3c-b^3=0$

4、正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $A_1B_1C_1D_1$ 内有一个动点 M，且 $BM\,//$ 平面 AD_1C，则 $\tan\angle D_1MD$ 的最大值是________

答案：$\sqrt{2}$

解析：由已知点 M 在线段 A_1C_1 上运动，所以 $\tan\angle D_1MD=\frac{DD_1}{D_1M}\le\sqrt{2}$，且当点 M 是 A_1C_1 中点时等号成立.

5、数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_{n+1}=1+\frac{2}{a_n}(n=1,2,\cdots)$，那么 $a_n=$______

答案：$a_n=2+\frac{3}{(-2)^n-1}$ $\quad(n=1,2,\cdots)$

解析：由递推关系得 $a_{n+1}+1=\frac{2}{a_n}(a_n+1)$，$a_{n+1}-2=-\frac{1}{a_n}(a_n-2)$

所以 $\frac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}-2}=-2\cdot\frac{a_n+1}{a_n-2}$，所以 $\frac{a_n+1}{a_n-2}=(-2)^{n-1}\cdot\frac{a_1+1}{a_1-2}=(-2)^n$

所以 $a_n=2+\frac{3}{(-2)^n-1}$ $\quad(n=1,2,\cdots)$

6、已知$x,y,z>0$，则$f=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+4z^2}+\sqrt{z^2+16x^2}}{9x+3y+5z}$的最小值是________

答案：$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

解析：由柯西不等式得

$\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+4}\ge x+2y$，$\sqrt{y^2+4z^2}\sqrt{1+4}\ge y+4z$，$\sqrt{z^2+16x^2}\sqrt{1+4}\ge z+8x$

所以$f=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+4z^2}+\sqrt{z^2+16x^2}}{9x+3y+5z}$

$\ge\dfrac{x+2y+y+4z+z+8x}{(9x+3y+5z)\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

且当$y=z=2x$时取等号

7、设ΔABC的内心为I，而且满足$2\overrightarrow{IA}+5\overrightarrow{IB}+6\overrightarrow{IC}=\vec{0}$，则$\cos\angle B$的值是_____

答案：$\dfrac{5}{8}$

解析：设ΔABC的三边长为a,b,c，由熟悉的结论：$a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

得$a:b:c=2:5:6$，所以$\cos\angle B=\dfrac{5}{8}$

8、已知双曲线 H：$x^2-y^2=1$上第一象限内一点M，过M的作 H 的切线l，与双曲线 H 切于M，交 H 的渐近线于P，Q两点（P在第一象限），R与Q在同一渐近线上.则$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}$的最小值为________.

答案：$-\dfrac{1}{2}$

解析：设点$M(x_0,y_0)$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则$l:x_0x-y_0y-1=0$，$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{x_0}{y_0}$

且$\begin{cases}x_1^2-y_1^2=0\\x_2^2-y_2^2=0\end{cases}$，

$\therefore\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\dfrac{\frac{x_1+x_2}{2}}{\frac{y_1+y_2}{2}}=1$，注意到$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{x_0}{y_0}$

$\therefore\dfrac{\frac{x_1+x_2}{2}}{\frac{y_1+y_2}{2}}=\dfrac{y_0}{x_0}\therefore\dfrac{\frac{x_1+x_2}{2}}{\frac{y_1+y_2}{2}}=\dfrac{y_0}{x_0}$即 M 为 PQ 的中点.

$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=|\overrightarrow{RM}|^2-\dfrac{1}{4}|\overrightarrow{PQ}|^2\ge\dfrac{1}{4}PO^2-\dfrac{1}{4}PQ^2=-\dfrac{1}{4}OQ^2$.

考虑到 M 在第一象限，故$OQ^2\le 2$

$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=-\frac{1}{4}OQ^2\geq-\frac{1}{2}$

9、小张参加一次十道选择题的测试，做对一道得一分，做错一道扣一分，不做得零分．他的目标是至少得7分，7分及格．小张现在确定他前六道题的答案是正确的，而剩下的每道题做对的概率为$\frac{1}{2}$，小张应该做______多少道题，及格的概率最大

答案：7或9

解析：做对6道题．再做一道题及格的概率为$P_1=p$，再做两道题及格的概率为$P_2=p^2$，再做三道题及格的概率为$P_3=p^3+C_3^2p^2(1-p)=p^2(3-2p)$，再做四道题及格的概率为$P_4=p^4+C_4^3p^3(1-p)=p^3(4-3p)$．显然$P_1>P_2$，$P_3>P_4$．因此，只需比较$P_1$与$P_3$的大小．

当$P_1<P_3$，即$p^2(3-2p)>p$时，解得$\frac{1}{2}<p<1$．

因此，当$\frac{1}{2}<p<1$时，$P_1<P_3$，此时回答九道题及格的概率最大；当$0<p<\frac{1}{2}$时，$P_1>P_3$，

此时回答七道题及格的概率最大；当$p=\frac{1}{2}$时，$P_1=P_3$，此时回答七道题或回答九道题及格的概率最大

10、设实数x,y使得$x-y$，x^2-y^2，x^3-y^3均为素数，则$x-y$的值是______

答案：3

解析：设$x-y=p$，$x^2-y^2=q$，$x^3-y^3=r$，期中p,q,r都是素数，

$$x+y=\frac{x^2-y^2}{x-y}=\frac{q}{p}$$

所以$x=\frac{1}{2}(\frac{q}{p}+p)$，$y=\frac{1}{2}(\frac{q}{p}-p)$代入$x^3-y^3=r$整理得

$$3q^2=p(4r-p^3)$$

故$p|3q^2$，所以$p=3$或$p=q$，经检验只能$p=3$

二、解答题（共70分）

11、（本题15分）

已知：O是ΔABC的外心，D,E分别是边AC,AB上的点．线段DE,BD,CE的中点分别为P,Q,R．$OH\perp DE$垂足为H．

求证：P,Q,R,H四点共圆

证明：设ΔADE的三个内角分别为A,D,E，ΔABC的外接圆半径为R

由$QP\parallel AB,RP\parallel AC$知

$\sin\angle QPH=\sin E$，$\sin\angle QPR=\sin A$，$\sin\angle HPR=\sin D$

又$PQ=\frac{BE}{2},PR=\frac{CD}{2}$，

故 P,Q,R,H四点共圆$\Leftrightarrow PQ\sin\angle RPH-PR\sin\angle QPH=PH\sin\angle QPR$

$\Leftrightarrow \dfrac{BE}{2}\sin D-\dfrac{CD}{2}\sin E=PH\sin A$

$\Leftrightarrow BE\cdot AE-CD\cdot AD=2PH\cdot DE$

$\Leftrightarrow (R^2-DE^2)-(R^2-OD^2)=(DH-EH)\cdot(DH+EH)$

$\Leftrightarrow OD^2-OE^2=DH^2-EH^2$

$\Leftrightarrow OH\perp DE$ 得证

12、（本题 15 分）

在区间$(2^{2n},2^{3n})$中任取$2^{2n-1}+1$个奇数.求证：在所取出的数中，必有两个数，其中一个数的平方不能被另一个数整除.

证明 易知在所选取的数中存在 a,b，它们被 2^{2n} 除的余数相等。下证它们即为所求。

假设不然，有 $b\mid a^2$，则 $b\mid(a^2-2ab+b^2)=(a-b)^2$。设 $a=p\cdot 2^{2n}+r,b=q\cdot 2^{2n}+r$

则有

$$b\mid(a-b)^2=(p-q)^2\cdot 2^{4n}$$

由于 b 为奇数，所以

$$b\mid(p-q)^2$$

由此得知 $|p-q|>2^n$ 和 $\max\{a,b\}=\max\{p,q\}\cdot 2^{2n}+r>2^{3n}$，由题意知这是不可能的。

13、（本题 20 分）

已知：a,b,c 为正实数.证明：$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 9(ab+bc+ca)$

证明：由抽屉原理，a,b,c 中必有两个数同时不大于 1，或同时比小于 1，设为 a,b

则由 $(a^2-1)(b^2-1)\ge 0$ 得 $a^2b^2+1\ge a^2+b^2$

所以 $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)=(a^2b^2+2a^2+2b^2+4)(c^2+2)$

$$\ge 3(a^2+b^2+1)(1+1+c^2)$$

$$\ge 3(a+b+c)^2\ge 9(ab+bc+ca)$$

14、（本题 20 分）

10×10 的表格上填入 1 到 100，第 i 行第 j 列填入 $10(i-1)+j$.每次操作如下：取一个格子，或者将此格数字减少 2，将两个相对的邻格同时加 1；或者将此格数字增加 2，将两个相对的邻格同时减 1.

证明：如果经过一些步骤后表格中又得到 1 到 100 的数字，则它们是按原来的顺序排列的.

证明：设一开始填数字 k 的格子为 a_k，令 $A=\sum_{i=1}^{100} ia_i$

则 A 在操作中是不变量，始终为 $\sum_{i=1}^{100} i^2=338350$

又因此数为表格中 1 到 100 所能得到的最大值，故等号成立，所以顺序不变.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。