2023年大连市高三第一次模拟考试

数 学

命题人：安道波　周亚明　张振华　　校对人：安道波

本试卷共6页．考试结束后，将答题卡交回．

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区.

2. 选择题必须使用2B铅笔填涂；非选择题必须使用0.5毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整、笔迹清楚.

3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效.

4. 作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑.

5. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀.

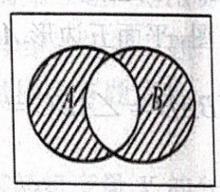
第Ⅰ卷

一.单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求.

1．已知$a\in\mathbf{R}$，i为虚数单位，若$\dfrac{a-\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}$为实数，则$a=$

A．-3　B．$\dfrac{1}{3}$　C．3　D．$-\dfrac{1}{3}$

2．如图所示的Venn图中，A,B是非空集合，定义集合$A\otimes B$为阴影部分表示的集合，若$A=\{x|x=2n+1,n\in\mathbf{N},n\le 4\}$，$B=\{2,3,4,5,6,7\}$，则$A\otimes B=$

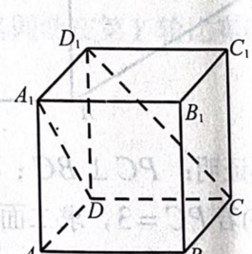


A．$\{1,2,4,6\}$　B．$\{2,4,6,9\}$　C．$\{2,3,4,5,6,7\}$　D．$\{1,2,4,6,9\}$

3．已知随机变量$X\sim N(2,\sigma^2)$，且$P(X\le 4)=0.84$，则$P(0<X\le 4)=$

A．0.84　B．0.68　C．0.34　D．0.16

4．如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，异面直线A_1D与D_1C所成的角为



A．$\dfrac{\pi}{6}$　B．$\dfrac{\pi}{4}$　C．$\dfrac{\pi}{3}$　D．$\dfrac{\pi}{2}$

5．6本不同的书，分给甲、乙、丙三人，每人至少一本，则甲得到4本的概率是

A．$\dfrac{1}{18}$　B．$\dfrac{1}{20}$　C．$\dfrac{1}{30}$　D．$\dfrac{1}{60}$

6. 牛顿迭代法是我们求方程近似解的重要方法．对于非线性可导函数 $f(x)$ 在 x_0 附近一点的函数值可用 $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ 代替，该函数零点更逼近方程的解，以此法连续迭代，可快速求得合适精度的方程近似解．利用这个方法，解方程 $x^3-3x+1=0$，选取初始值 $x_0=\dfrac{1}{2}$，在下面四个选项中最佳近似解为

A. 0.333　B. 0.335　C. 0.345　D. 0.347

7. 已知对于每一对正实数 x,y，函数 f 满足：$f(x)+f(y)=f(x+y)-xy-1$，若 $f(1)=1$，则满足 $f(n)=n$（$n\in\mathbf{N}^*$）的 n 的个数是

A. 1个　B. 2个　C. 3个　D. 4个

8. 已知点 P 为平面直角坐标系 xOy 内的圆 $x^2+y^2=16$ 上的动点，点 $A(-3,2)$，现将坐标平面沿 y 轴折成 $\dfrac{2\pi}{3}$ 的二面角，则 A,P 两点间距离的取值范围是

A. $[\sqrt{13},3\sqrt{5}]$　B. $[\sqrt{13},7]$　C. $[4-\sqrt{13},3\sqrt{5}]$　D. $[4-\sqrt{13},7]$

二.多项选择题：（本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.）

9. 在 ΔABC 中，若 $\tan\dfrac{A+B}{2}=\sin C$，则下列结论正确的是

A. $\dfrac{\tan A}{\tan B}=1$　　B. $0<\sin A+\sin B\leq\sqrt{2}$

C. $\sin^2 A+\cos^2 B=1$　　D. $\cos^2 A+\cos^2 B=\sin^2 C$

10.阅读数学材料："设 P 为多面体 M 的一个顶点，定义多面体 M 在点 P 处的离散曲率为 $1-\dfrac{1}{2\pi}\left(\angle Q_1PQ_2+\angle Q_2PQ_3+\cdots+\angle Q_{k-1}PQ_k+\angle Q_kPQ_1\right)$，其中 $Q_i\,(i=1,2,\cdots,k,k\geq 3)$ 为多面体 M 的所有与点 P 相邻的顶点，且平面 Q_1PQ_2，平面 Q_2PQ_3，…，平面 $Q_{k-1}PQ_k$ 和平面 Q_kPQ_1 为多面体 M 的所有以 P 为公共点的面．"

解答问题：已知在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 为菱形，$AA_1=AB$，则下列说法正确的是

A. 四棱柱 AC_1 在其各顶点处的离散曲率都相等

B. 若 $AC=BD$，则四棱柱 AC_1 在顶点 A 处的离散曲率为 $\dfrac{1}{4}$

C. 若四面体 A_1ABD 在点 A_1 处的离散曲率为 $\dfrac{7}{12}$，则 $AC_1\perp$ 平面 A_1BD

D. 若四棱柱 AC_1 在顶点 A 处的离散曲率为 $\dfrac{1}{3}$，则 BC_1 与平面 ACC_1 的夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$

11.定义在 $\mathbf{R}$ 上函数 $f(x)=x^4+2x^3+4x^2+ax+1$，则

A．存在唯一实数 a，使函数 $f(x)$ 图像关于直线 $x=-\dfrac{1}{2}$ 对称

B．存在实数 a，使函数 $f(x)$ 为单调函数

C．任意实数 a，函数 $f(x)$ 都存在最小值

D．任意实数 a，函数 $f(x)$ 都存两条过原点的切线

12.已知直线 $l:y=kx+m$ 与椭圆 $C:\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 交于 A,B 两点，点 F 为椭圆 C 的下焦点，则下列结论正确的是

A．当 $m=1$ 时，$\exists k\in\mathbf{R}$，使得 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|=3$

B．当 $m=1$ 时，$\forall k\in\mathbf{R}$，$|\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}|>2$

C．当 $k=1$ 时，$\exists m\in\mathbf{R}$，使得 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|=\dfrac{11}{2}$

D．当 $k=1$ 时，$\forall m\in\mathbf{R}$，$|\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}|\geq\dfrac{6}{5}$

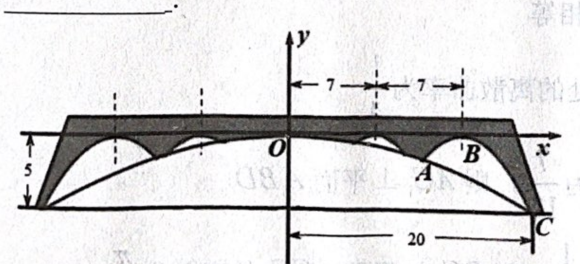
第II卷

三.填空题:（本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分,把答案填在答卷纸的相应位置上）

13. 若 $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)=\dfrac{1}{2}$，则 $\sin 2\theta=$______.

14. 已知单位向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为 $60°$，若 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$，则记作 $\boldsymbol{a}=[x,y]$.已知向量 $\boldsymbol{m}=[1,2]$，$\boldsymbol{n}=[1,-1]$ 则 $|\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}|=$________.

15. 早在一千多年之前，我国已经把溢流孔技术用于造桥，以减轻桥身重量和水流对桥身的冲击，现设桥拱上有如图所示的 4 个溢流孔，桥拱和溢流孔轮廓线均为抛物线的一部分，且四个溢流孔轮廓线形状相同，建立如图所示的平面直角坐标系 xOy，根据图上尺寸，溢流孔 ABC 所在抛物线的方程为_________， 溢流孔与桥拱交点 A 的横坐标为___________.



16.甲、乙、丙三人每次从写有整数m，n，$k(0<m<n<k)$的三张卡片中各摸出一张，并按卡片上的数字取出相同数目的石子，放回卡片算做完一次游戏，然后再继续进行. 当他们做了$N(N\geq 2)$次游戏后，甲有22粒石子，乙有9粒石子，丙有9粒石子，并且知道最后一次丙摸的是k，那么做游戏次数是________.

四.解答题：(本大题共6小题,共70分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17.(本小题满分10分)

从①②③中选择一个条件补充到题目中：①$S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(b^2+c^2-a^2)$，

②$\dfrac{a+b}{\sin C}=\dfrac{c-b}{\sin A-\sin B}$，③$\sqrt{3}\sin C+\cos C=\dfrac{c+b}{a}$，

解决下面的问题.

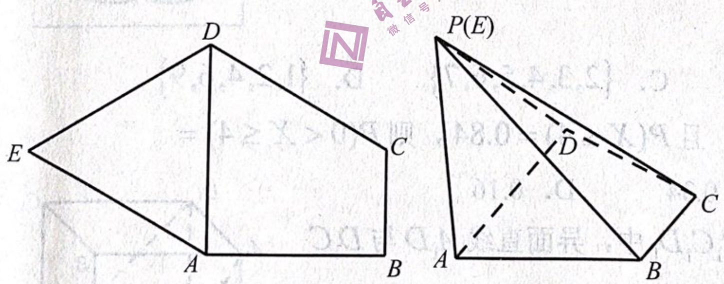
在$\triangle ABC$中，角A，B，C对应边分别为a，b，c，且__________.

(I)求角A；

(II)若D为边AB的中点，$CD=2\sqrt{3}$，求$b+c$的最大值.

18.(本小题满分12分)

如图，平面五边形$ABCDE$中，$\triangle ADE$是边长为2的等边三角形，$CD//AE$，$CD=AE$，$\angle BAD=\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}$，将$\triangle ADE$沿$AD$翻折，使点$E$翻折到点$P$.



(I)证明：$PC\perp BC$；

(II)若$PC=3$，求二面角$P-AD-B$的大小，以及直线PB与平面PCD所成角的正弦值.

19.（本小题满分 12 分）

在正项数列$\{a_n\}$中，$a_1=\dfrac{1}{2}$，$2^{2n}\cdot a_n^2=1+2^{2n-2}\cdot a_{n-1}^2(n\geq 2)$.

(I)求a_n；

(II)证明：$\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i-\dfrac{\sqrt{i+1}}{2^{i+1}})<\dfrac{1}{2}$.

20.（本小题满分 12 分）

国学小组有编号为$1,2,3,\cdots,n$的n位同学，现在有两个选择题，每人答对第一题的概率为$\dfrac{2}{3}$、第二题的概率为$\dfrac{1}{2}$，每个同学的答题过程都是相互独立的，比赛规则如下：

①按编号由小到大的顺序依次进行，第 1 号同学开始第 1 轮比赛，先答第一题；②若第$i\left(i=1,2,3,\cdots,n-1\right)$号同学未答对第一题，则第$i$轮比赛失败，由第$i+1$号同学继续比赛；③若第$i\left(i=1,2,3,\cdots,n-1\right)$号同学答对第一题，再答第二题，若该生答对第二题，则比赛在第i轮结束；若该生未答对第二题，则第i轮比赛失败，由第$i+1$号同学继续答第二题，且以后比赛的同学不答第一题；④若比赛进行到了第n轮，则不管第n号同学答题情况，比赛结束.

（I）令随机变量X表示n名同学在第X轮比赛结束，当$n=3$时，求随机变量X的分布列；

（II）若把比赛规则③改为：若第$i\left(i=1,2,3,\cdots,n-1\right)$号同学未答对第二题，则第$i$轮比赛失败，第$i+1$号同学重新从第一题开始作答. 令随机变量$Y$表示$n$名同学在第$Y$轮比赛结束.

（i）求随机变量$Y\left(n\in\mathbf{N}^*,n\geq 2\right)$的分布列；

（ii）证明：$E\left(Y\right)$随n增大而增大，且小于 3.

21.（本小题满分 12 分）

已知双曲线$C=\left\{(x,y)\mid ax^2-by^2=1(a>0,\ b>0)\right\}$和集合$Q=\left\{(x,y)\mid 0<ax^2-by^2<1(a>0,\ b>0)\right\}$，直角坐标平面内任意点$N(x_0,\ y_0)$，直线$l$：$ax_0x-by_0y=1$称为点$N$关于双曲线$C$的“相关直线”.

（I）若$N\in C$，判断直线l与双曲线C的位置关系，并说明理由；

（II）若直线l与双曲线C的一支有 2 个交点，求证：$N\in Q$；

（III）若点$N\in Q$，点M在直线l上，直线MN交双曲线C于A,B， 求证：$\dfrac{|MA|}{|AN|}=\dfrac{|MB|}{|BN|}$.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数$f\left(x\right)=2ae^{-x}-\sin x+1$，$f'(x)$是$f(x)$的导函数，且$f'(0)=0$.

（I）求a的值，并证明函数$f\left(x\right)$在$x=0$处取得极值；

（II）证明：$f\left(x\right)$在区间$\left[2k\pi,2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right](k\in \mathrm{N})$有唯一零点.