湛江市 2023 年普通高考测试(一)

数学参考答案及评分标准

2023.3

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1.【答案】A

【解析】由 $\frac{1+i}{1-bi}=i$,得 $1-bi=\frac{1+i}{i}=1-i$,所以 $b=1$.故选 A.

2.【答案】C

【解析】图中阴影部分表示 $B\cap \complement_R A$.由 $\frac{2}{x-1}<1$,得 $x<1$ 或 $x>3$,所以 $\complement_R A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$.

由 $\frac{1}{2}<2^x<4$,解得 $-1<x<2$,所以 $B=\{x\mid -1<x<2\}$,故 $B\cap\complement_R A=\{x\mid 1\leqslant x<2\}$.故选 C.

3.【答案】B

【解析】将两个 0 视为一个元素,将两个 9 也视为一个元素,所以共有 $A_4^4=24$(种)不同的结果,故选 B.

4.【答案】D

【解析】因为 $\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$,

所以 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\right)=\frac{3}{4}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$,故选 D.

5.【答案】C

【解析】由题意,花灯的体积等于上面的正六棱台体积与下面的正六棱柱体积的和,正六棱台的两个底面积分别为 $S_1=6\times\frac{1}{2}\times 20\times 20\times\sin 60^\circ=600\sqrt{3}(\mathrm{cm}^2)$,$S_2=6\times\frac{1}{2}\times 40\times 40\times\sin 60^\circ=2400\sqrt{3}(\mathrm{cm}^2)$,所以花灯的体积 $V=60S_2+\frac{1}{3}\times 10\times(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})=60\times 2400\sqrt{3}+\frac{1}{3}\times 10\times(600\sqrt{3}+2400\sqrt{3}+\sqrt{600\sqrt{3}\times 2400\sqrt{3}})=50\ 000\sqrt{3}(\mathrm{cm}^3)$,故选 C.

6.【答案】B

【解析】由题可知 $F(0,2)$,设直线 l 的方程为 $y=kx+2$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由 $\begin{cases}y=kx+2,\\x^2=8y,\end{cases}$ 得 $x^2-8kx-16=0$,故 $x_1x_2=-16$.又 $y_1=\frac{x_1^2}{8}$,$y_2=\frac{x_2^2}{8}$,所以 $y_1y_2=\frac{(x_1x_2)^2}{64}=4$.圆 $x^2+(y-2)^2=4$ 的圆心为 $F(0,2)$,半径 $r=2$,所以 $|AD|=|AF|-r=|AF|-2$,$|BE|=|BF|-r=|BF|-2$.又 $|AF|=y_1+2$,$|BF|=y_2+2$,所以 $|AD|=y_1+2-2=y_1$,$|BE|=y_2+2-2=y_2$,所以 $|AD|\cdot|BE|=y_1y_2=4$.故选 B.

7.【答案】A

【解析】因为 $a=\left(\frac{9}{11}\right)^{0.1}<\left(\frac{9}{11}\right)^{0}=1$，$b=\log_9 10>\log_9 9=1$，$c=\lg 11>\lg 10=1$，$2=\lg 100>\lg 99=\lg 9+\lg 11>2\sqrt{\lg 9\times\lg 11}$，所以 $1>\lg 9\times\lg 11$，故 $\frac{1}{\lg 9}>\lg 11$. 又 $b=\log_9 10=\frac{1}{\lg 9}$，所以 $b>c$，所以 $b>c>a$. 故选 A.

8.【答案】C

【解析】由 $f'(2-x)+f'(x)=2$，令 $x=1$，得 $2f'(1)=2$，所以 $f'(1)=1$.

由 $f(x-1)$ 为奇函数，得 $f(x-1)=-f(-x-1)$，所以 $f'(x-1)=f'(-x-1)$，

故 $f'(x)=f'(-x-2)$①.

又 $f'(2-x)+f'(x)=2$②，

由①和②得 $f'(2-x)+f'(-x-2)=2$，即 $f'(4-x-2)+f'(-x-2)=2$，

所以 $f'(x)+f'(x+4)=2$③.

令 $x=-1$，得 $f'(-1)+f'(3)=2$，得 $f'(3)=0$.

令 $x=1$，得 $f'(1)+f'(5)=2$，得 $f'(5)=1$.

又 $f'(x+4)+f'(x+8)=2$④.

由③－④得 $f'(x)-f'(x+8)=0$，即 $f'(x)=f'(x+8)$.

所以函数 $f'(x)$ 是以 8 为周期的周期函数.

故 $f'(7)=f'(-1)=2$.

所以 $f'(1)+f'(3)+f'(5)+f'(7)=1+0+1+2=4$.

所以 $\sum_{i=1}^{25}f'(2i-1)=f'(1)+f'(3)+f'(5)+f'(7)+\cdots+f'(49)=6(f'(1)+f'(3)+f'(5)+f'(7))+f'(49)=24+1=25$. 故选 C.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9.【答案】AC

【解析】因为离群点(168，89)的横坐标 168 小于平均值 173.5，纵坐标 89 相对过大，所以去掉离群点后经验回归直线的截距变小而斜率变大，所以 $\hat{a}_1>\hat{a}_2$，$\hat{b}_1<\hat{b}_2$，所以 A 正确，B 错误；去掉离群点后成对样本数据的线性相关程度更强，拟合效果会更好，所以 $r_1<r_2$，$R_1^2<R_2^2$，所以 C 正确，D 错误. 故选 AC.

10.【答案】ABD

【解析】如图 1，设点 M 为棱 A_1D_1 的中点，则 $MC_1 \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} AE$，所以四边形 AEC_1M 为平行四边形. 又 $A_1B/\!/ME$，$A_1B\not\subset$ 平面 AEC_1，$ME\subset$ 平面 AEC_1，所以 $A_1B/\!/$ 平面 AEC_1，故 A 正确；

由上可知，四边形 AEC_1M 为平面 AEC_1 截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的截口平面，易得 $AE=EC_1=C_1M=MA=\sqrt{5}$，故四边形 AEC_1M 为菱形. 又其对角线 $EM=2\sqrt{2}$，$AC_1=2\sqrt{3}$，故其面积为 $\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{3}=2\sqrt{6}$，故 D 正确；

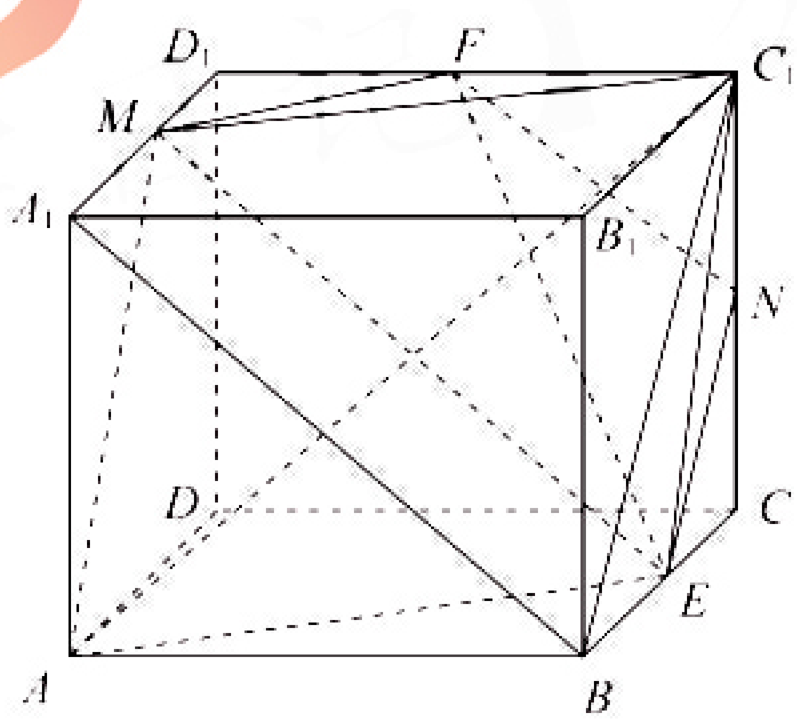


图1

设 CC_1 的中点为 N，连接 EN，FN. 因为 E，N 分别为 BC 与 CC_1 的中点，所以 $EN\parallel BC_1$，故 $\angle NEF$ 为 EF 与 BC_1 所成的角，又 $EN=FN=\sqrt{2}$，$EF=\sqrt{6}$，

由余弦定理可得 $\cos\angle NEF=\frac{EN^2+EF^2-NF^2}{2EN\cdot EF}=\frac{2+6-2}{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 EF 与 BC_1 所成的角为 30°，故 B 正确；

如图 2，假设 $EF\perp$ 平面 B_1AC 正确，则 $EF\perp B_1C$，又 $FC_1\perp B_1C$，$EF\cap FC_1=F$，所以 $B_1C\perp$ 平面 EFC_1，得 $B_1C\perp EC_1$. 在正方形 B_1C_1CB 中，$B_1C\perp EC_1$ 显然不成立，所以假设错误，即 $EF\perp$ 平面 B_1AC 错误，故 C 错误. 故选 ABD.

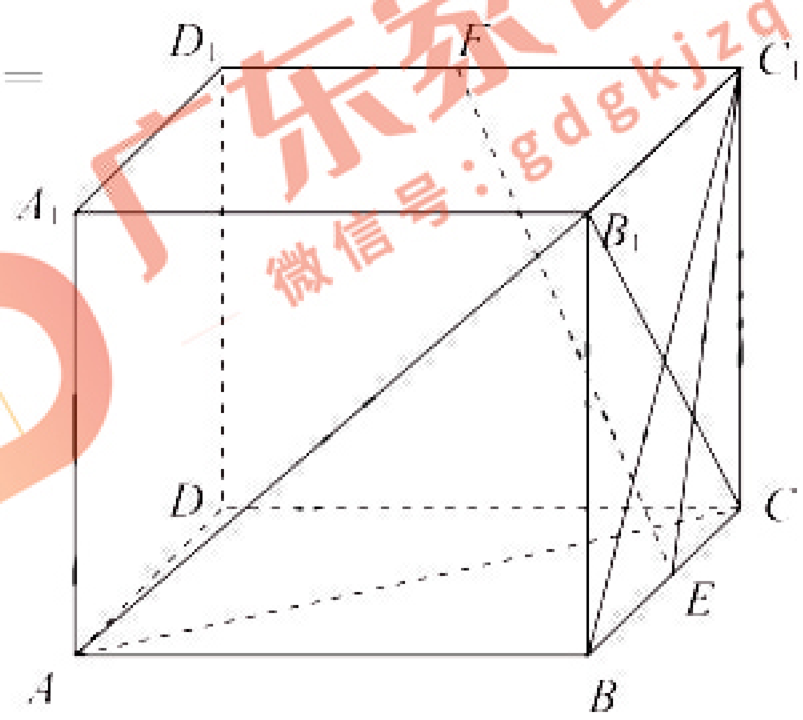


图2

11.【答案】ACD

【解析】由 $T=\frac{2\pi}{\omega}=2$，得 $\omega=\pi$，所以 A 正确；

当 $\omega=2$ 时，$f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，所以函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后得 $f\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\neq g(x)$，所以 B 错误；

若 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right)$ 上单调递增，则 $\begin{cases}\frac{2\pi\omega}{3}+\frac{\pi}{3}\geqslant\pi+2k\pi,\\ \pi\omega+\frac{\pi}{3}\leqslant 2\pi+2k\pi,\end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}$，解得 $1+3k\leqslant\omega\leqslant\frac{5}{3}+2k$，$k\in\mathbf{Z}$.

又 $\omega>0$，所以只有当 $k=0$ 时，此不等式有解，即 $1\leqslant\omega\leqslant\frac{5}{3}$，所以 C 正确；

若 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上只有一个零点，则 $\begin{cases}\pi\omega+\frac{\pi}{3}>\frac{\pi}{2},\\ \pi\omega+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2},\end{cases}$ 解得 $\frac{1}{6}<\omega\leqslant\frac{7}{6}$，所以 D 正确. 故选 ACD.

12.【答案】AB

【解析】由 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，得 $y=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2-b^2}\ (x>a)$，所以 $y'=\frac{\frac{b^2}{a^2}x}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2-b^2}}$，则在点 $A(x_1,y_1)$ 处的切线斜率为 $y'=\frac{\frac{b^2}{a^2}x_1}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x_1^2-b^2}}=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$，所以在点 $A(x_1,y_1)$ 处的切线方程为 $y-y_1=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)$，又有 $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$，化简即可得切线方程为 $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$.

所以 $\frac{x_1x_2}{a^2}-\frac{y_1\times 0}{b^2}=1$，所以 $x_1x_2=a^2$，故 C 错误；

由 $x_1x_2=a^2$，得 $x_2=\frac{a^2}{x_1}$，又 $x_1>a$，所以 $0<x_2<a$，故 A 正确；

由 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，$B\left(\frac{a^2}{x_1},0\right)$，得 $|F_1B|=\frac{a^2}{x_1}+c$，$|BF_2|=c-\frac{a^2}{x_1}$，

故 $\frac{|F_1B|}{|BF_2|}=\frac{\frac{a^2}{x_1}+c}{c-\frac{a^2}{x_1}}=\frac{cx_1+a^2}{cx_1-a^2}$，

由 $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$，得 $y_1^2=\frac{b^2x_1^2}{a^2}-b^2$，

所以 $|AF_1|=\sqrt{(x_1+c)^2+y_1^2}=\sqrt{(x_1+c)^2+\frac{b^2x_1^2}{a^2}-b^2}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}x_1^2+2cx_1+a^2}=\frac{c}{a}x_1+a$，

所以 $|AF_2|=|AF_1|-2a=\frac{c}{a}x_1-a$，

所以 $\frac{|AF_1|}{|AF_2|}=\frac{\frac{c}{a}x_1+a}{\frac{c}{a}x_1-a}=\frac{cx_1+a^2}{cx_1-a^2}=\frac{|F_1B|}{|BF_2|}$，

设点 A 到 x 轴的距离为 h，

则 $S_{\triangle AF_1B}=\frac{1}{2}|F_1B|h=\frac{1}{2}|AF_1||AB|\sin\angle F_1AB$，$S_{\triangle AF_2B}=\frac{1}{2}|F_2B|h=\frac{1}{2}|AF_2||AB|\sin\angle F_2AB$，

$\frac{S_{\triangle AF_1B}}{S_{\triangle AF_2B}}=\frac{|F_1B|}{|F_2B|}=\frac{|AF_1|\sin\angle F_1AB}{|AF_2|\sin\angle F_2AB}$，又 $\frac{|AF_1|}{|AF_2|}=\frac{|F_1B|}{|BF_2|}$，所以 $\angle F_1AB=\angle F_2AB$，故 B 正确；

由上可得 $\overrightarrow{F_1B}=\left(\frac{a^2}{x_1}+c,0\right)$，$\overrightarrow{BF_2}=\left(c-\frac{a^2}{x_1},0\right)$，因为 $\overrightarrow{F_1B}=3\overrightarrow{BF_2}$，则 $\frac{a^2}{x_1}+c=3\left(c-\frac{a^2}{x_1}\right)$，得 $x_1=\frac{2a^2}{c}$，

$|AF_1|=\frac{c}{a}x_1+a=\frac{c}{a}\times\frac{2a^2}{c}+a=3a$，$|AF_2|=\frac{c}{a}x_1-a=\frac{c}{a}\times\frac{2a^2}{c}-a=a$，

所以 $\cos\angle F_1AF_2=\frac{|AF_1|^2+|AF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2\times|AF_1|\times|AF_2|}=\frac{9a^2+a^2-4c^2}{6a^2}=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}e^2=\frac{1}{3}$，解得 $e=\sqrt{2}$，

故 D 错误. 故选 AB.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.【答案】-16

【解析】因为 $S_{15}=0$，所以 $a_8=a_1+7d=0$. 又 $a_3=a_1+2d=10$，所以 $d=-2$，$a_1=14$，所以 $S_n=-n^2+15n$，所以 $S_{16}=-16^2+15\times16=-16$.

14.【答案】$-\sqrt{2}$

【解析】$\frac{\cos70^\circ-\cos20^\circ}{\cos65^\circ}=\frac{\sin20^\circ-\cos20^\circ}{\cos(45^\circ+20^\circ)}=\frac{\sin20^\circ-\cos20^\circ}{\cos45^\circ\cos20^\circ-\sin45^\circ\sin20^\circ}=-\sqrt{2}$.

15.【答案】$\frac{1}{\ln 2}$

【解析】因为 $f(x)=e^x-ax^2-a$，定义域为 **R**，所以 $f'(x)=e^x-2ax$，

故 $e^{x_1}-2ax_1=0$，$e^{x_2}-2ax_2=0$. 又 $x_2=2x_1$，所以 $e^{2x_1}-4ax_1=0$.

又 $e^{x_1}>0$，

故 $e^{x_1}=2$，所以 $x_1=\ln 2$，所以 $a=\frac{e^{x_1}}{2x_1}=\frac{1}{\ln 2}$.

16.【答案】$2^n(x+1)-1$　0

【解析】由题意，$f^{(n)}(x)=2^n x+2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2^0=2^n x+\left(\dfrac{1-2^n}{1-2}\right)=2^n(x+1)-1$.

所以 $f^{(100)}(32)=33\times 2^{100}-1=33\times 16^{25}-1=33\times(17-1)^{25}-1$

$=33(C_{25}^{0}17^{25}-C_{25}^{1}17^{24}+C_{25}^{2}17^{23}-C_{25}^{3}17^{22}+\cdots+C_{25}^{24}17-1)-1$

$=33(C_{25}^{0}17^{25}-C_{25}^{1}17^{24}+C_{25}^{2}17^{23}-C_{25}^{3}17^{22}+\cdots+C_{25}^{24}17)-34$

$=17[33(C_{25}^{0}17^{24}-C_{25}^{1}17^{23}+C_{25}^{2}17^{22}-C_{25}^{3}17^{21}+\cdots+C_{25}^{24})-2]$.

又 $33(C_{25}^{0}17^{24}-C_{25}^{1}17^{23}+C_{25}^{2}17^{22}-C_{25}^{3}17^{21}+\cdots+C_{25}^{24})-2$ 为正整数，所以 $f^{(100)}(32)$ 除以 17 的余数为 0.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 解：(1)由 $2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-C\right)=2\cos\dfrac{\pi}{3}\cos C+2\sin\dfrac{\pi}{3}\sin C=\cos C+\sqrt{3}\sin C$, ………………… 1 分

所以 $\dfrac{b}{a}=\cos C+\sqrt{3}\sin C$，故 $b=\sqrt{3}a\sin C+a\cos C$.

由正弦定理得 $\sin B=\sqrt{3}\sin A\sin C+\sin A\cos C$. ………………………………… 2 分

又 $B=\pi-(A+C)$,

所以 $\sin B=\sin[\pi-(A+C)]=\sin(A+C)=\sqrt{3}\sin A\sin C+\sin A\cos C$. …………… 3 分

故 $\sin A\cos C+\cos A\sin C=\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C$，所以 $\cos A=\sqrt{3}\sin A$. ………… 4 分

所以 $\tan A=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $A=\dfrac{\pi}{6}$. ……………………………………………… 5 分

(2)由题意，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times 2c\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，所以 $c=3\sqrt{3}$. ………………………… 7 分

由余弦定理可得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=4+27-2\times 2\times 3\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=13$. ………………… 9 分

所以 $a=\sqrt{13}$. …………………………………………………………………… 10 分

18. 证明：(1)因为 $a_1=S_1=2a_1-4\times 1+2$，所以 $a_1=2$，$a_1+4=6$. ……………………… 1 分

由 $S_n=2a_n-4n+2$，得 $S_{n-1}=2a_{n-1}-4(n-1)+2$，$n\geq 2$,

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=(2a_n-4n-2)-[2a_{n-1}-4(n-1)+2]=2a_n-2a_{n-1}-4$，$n\geq 2$. ……… 3 分

所以 $a_n=2a_{n-1}+4$，$n\geq 2$，故 $\dfrac{a_n+4}{a_{n-1}+4}=2$，$n\geq 2$. ……………………………… 4 分

所以数列 $\{a_n+4\}$ 是以 6 为首项，2 为公比的等比数列. ……………………………… 5 分

(2)由(1)得 $a_n+4=6\times 2^{n-1}=3\times 2^n$，故 $a_n=3\times 2^n-4$. ………………………… 6 分

所以 $a_{n+1}=3\times 2^{n+1}-4$.

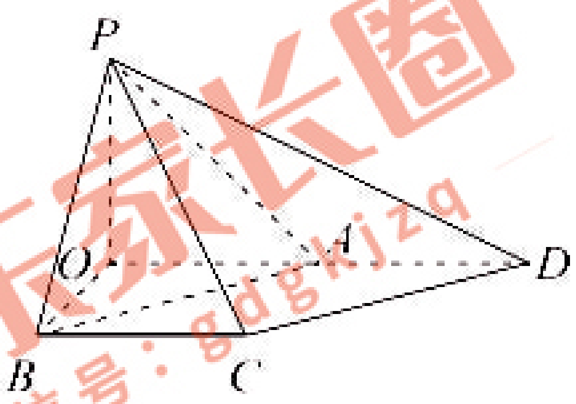
故 $\dfrac{2^n}{a_n\cdot a_{n+1}}=\dfrac{2^n}{(3\times 2^n-4)\cdot(3\times 2^{n+1}-4)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3\times 2^n-4}-\dfrac{1}{3\times 2^{n+1}-4}\right)$. ………………… 9 分

所以 $T_n=\dfrac{2}{a_1\cdot a_2}+\dfrac{2^2}{a_2\cdot a_3}+\cdots+\dfrac{2^n}{a_n\cdot a_{n+1}}$

$=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{20}+\cdots+\dfrac{1}{3\times 2^n-4}-\dfrac{1}{3\times 2^{n+1}-4}\right)$

$=\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3\times 2^{n+1}-4}<\dfrac{1}{6}$. ……………………………………………… 12 分

19. (1)证明：如图，过点 B 在平面 $ABCD$ 内作 BO 垂直于 AD，交 DA 的延长线于点 O，连接 OP. ………………………………………… 1 分



因为 $PB\perp BC$，$AD\parallel BC$，所以 $PB\perp DO$.

又 $BO\perp DO$，PB，$BO\subset$平面 POB，$BO\cap PB=B$，所以 $DO\perp$平面 POB. ………………………………………… 2 分

又 $PO\subset$平面 POB，所以 $DO\perp PO$，即 $AO\perp PO$.

因为$\angle ADC=45^\circ$，$AB\parallel DC$，所以$\angle OAB=45^\circ$.

又 $OA\perp OB$，所以$\angle OBA=45^\circ=\angle OAB$，故 $OA=OB$. ………………………………………… 3 分

因为$\triangle PAB$ 为等边三角形，所以 $PA=PB$.

又 $PO=PO$，所以$\triangle POA\cong\triangle POB$.

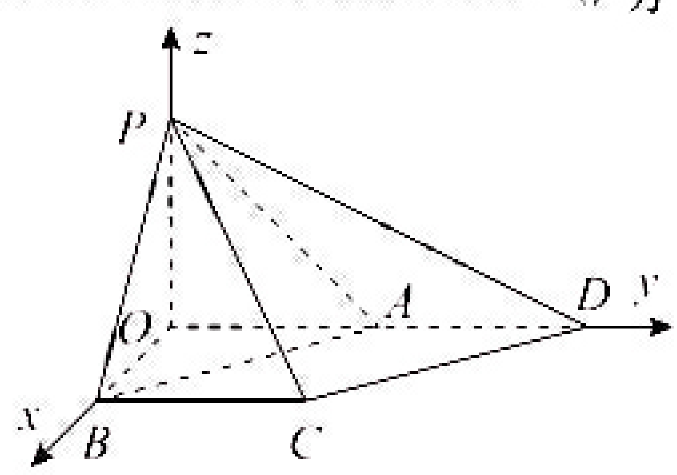
又 $PO\perp OA$，所以 $PO\perp OB$. ………………………………………… 4 分

又 OA，$OB\subset$平面 $ABCD$，$OA\cap OB=O$，所以 $PO\perp$平面 $ABCD$，

所以点 O 为点 P 在平面 $ABCD$ 的正投影.

又点 O 在直线 AD 上，故点 P 在平面 $ABCD$ 的正投影在直线 AD 上. ………………………… 5 分

(2)解：由(1)得 PO，OB，OA 两两垂直，以 O 为坐标原点，分别以 OB，OA，OP 所在直线为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$. ………………………………………… 6 分



易得 $PO=OB=OA=\sqrt{2}$，又 $AD=\sqrt{2}$，

所以 $B(\sqrt{2},0,0)$，$P(0,0,\sqrt{2})$，$C(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，$D(0,2\sqrt{2},0)$，

故$\overrightarrow{BC}=(0,\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{PC}=(\sqrt{2},\sqrt{2},-\sqrt{2})$，$\overrightarrow{DC}=(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$.

………………………………………… 7 分

设 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$为平面 PBC 的法向量，则有$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\end{cases}$

即$\begin{cases}\sqrt{2}y_1=0,\\ \sqrt{2}x_1+\sqrt{2}y_1-\sqrt{2}z_1=0,\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{n}=(1,0,1)$. ………………………………………… 9 分

设 $\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$为平面 PDC 的法向量，则有$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\end{cases}$

即$\begin{cases}\sqrt{2}x_2-\sqrt{2}y_2=0,\\ \sqrt{2}x_2+\sqrt{2}y_2-\sqrt{2}z_2=0,\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{m}=(1,1,2)$. ………………………………………… 10 分

所以 $|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以平面 PBC 与平面 PDC 夹角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ………………………………………… 12 分

20. 解：(1)由频率分布直方图，得$\overline{x}=0.8\times0.1+0.9\times0.2+1\times0.35+1.1\times0.3+1.2\times0.05=1$，

………………………………………… 2 分

$s^2=(0.8-1)^2\times0.1+(0.9-1)^2\times0.2+(1-1)^2\times0.35+(1.1-1)^2\times0.3+(1.2-1)^2\times0.05=0.011$. ………………………………………… 4 分

(2) ⅰ. 由(1)可知 $\hat{\mu}=1$, $\hat{\sigma}=\sqrt{0.011}\approx 0.105$.

所以 $\hat{\mu}-3\hat{\sigma}=1-0.315=0.685$, $\hat{\mu}+3\hat{\sigma}=1+0.315=1.315$. …………………………………… 5 分

显然 $1.33>1.315$, 故需停止生产并检查设备. …………………………………………………… 7 分

ⅱ. 抽测一个零件关键指标在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 之内的概率为 $0.997\ 3$, 所以抽测一个零件关键指标在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 之外的概率为 $1-0.997\ 3=0.002\ 7$. ……………………………… 8 分

故 $X\sim B(10,0.002\ 7)$, 所以 $P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)=1-0.997\ 3^{10}\approx 0.026\ 7$. …… 10 分

X 的数学期望 $E(X)=10\times 0.002\ 7=0.027$. …………………………………………………… 12 分

21. 解: (1) 由题意得 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$. ………………………………………………………………… 1 分

由椭圆的定义可知 $4a=8$, 所以 $a=2$, 所以 $c=1$. …………………………………………… 2 分

又 $a^2=b^2+c^2$, 所以 $b^2=3$. ……………………………………………………………………… 3 分

所以椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……………………………………………… 4 分

(2) 设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, 直线 l 的方程为 $x=my+1$,

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ x=my+1,\end{cases}$ 整理得 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$.

则有 $y_1+y_2=\frac{-6m}{3m^2+4}$, $y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$. …………………………………………… 6 分

故 $|AB|=\sqrt{(1+m^2)[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}=\sqrt{(1+m^2)\left[\left(\frac{-6m}{3m^2+4}\right)^2+\frac{36}{3m^2+4}\right]}=12\times\frac{m^2+1}{3m^2+4}$.

……………………………………………………………………………………………………… 7 分

直线 l' 的方程为 $x=-\frac{1}{m}y-1$, 设 $C(x_3,y_3)$, $D(x_4,y_4)$,

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ x=-\frac{1}{m}y-1,\end{cases}$ 整理得 $\left(\frac{3}{m^2}+4\right)y^2+\frac{6}{m}y-9=0$.

则有 $y_3+y_4=\frac{-\frac{6}{m}}{\frac{3}{m^2}+4}$, $y_3y_4=\frac{-9}{\frac{3}{m^2}+4}$, ……………………………………………………… 8 分

则 $|CD|=\sqrt{\left(1+\frac{1}{m^2}\right)[(y_3+y_4)^2-4y_3y_4]}=12\times\frac{\frac{1}{m^2}+1}{\frac{3}{m^2}+4}=12\times\frac{m^2+1}{4m^2+3}$. ……………… 9 分

所以四边形 $ACBD$ 的面积

$S=\frac{1}{2}|AB||CD|=72\times\frac{m^2+1}{3m^2+4}\times\frac{m^2+1}{4m^2+3}=72\times\frac{m^2+1}{3(m^2+1)+1}\times\frac{m^2+1}{4(m^2+1)-1}=$

$\frac{72}{\left(3+\frac{1}{m^2+1}\right)\left(4-\frac{1}{m^2+1}\right)}$. ……………………………………………………………… 10 分

$7\geqslant 2\sqrt{\left(3+\frac{1}{m^2-1}\right)\left(4-\frac{1}{m^2-1}\right)}$，当且仅当 $m^2=1$ 时，等号成立．…………………………… 11 分

所以 $S=\dfrac{72}{\left(3+\frac{1}{m^2-1}\right)\left(4-\frac{1}{m^2+1}\right)}\geqslant\dfrac{288}{49}$．

综上，四边形 $ACBD$ 面积的最小值为 $\dfrac{288}{49}$． ……………………………………………………… 12 分

22．(1)证明：$f(0)=e^0+\cos 0-2=0$， ……………………………………………………………… 1 分

当 $x<0$ 时，$e^x<1$，$\cos x\leqslant 1$，所以 $e^x+\cos x<2$，

故 $e^x+\cos x-2<0$，故 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上无零点． …………………………………… 2 分

当 $x\geqslant 0$ 时，$f'(x)=e^x-\sin x$，

$e^x\geqslant 1$，$-\sin x\geqslant -1$，所以 $f'(x)=e^x-\sin x\geqslant 0$， …………………………………… 3 分

所以当 $x\geqslant 0$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增，所以 $f(x)\geqslant f(0)=0$，

故函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上有唯一零点 0．

综上，函数 $f(x)$ 在定义域上有唯一零点． ……………………………………………………… 4 分

(2)解：由 $f(x)>ax-\sin x$，得 $e^x+\cos x-2>ax-\sin x$，即 $e^x+\sin x-\cos x-2-ax>0$，

设 $g(x)=e^x+\sin x+\cos x-2-ax$，则 $g'(x)=e^x+\cos x-\sin x-a$，

则 $g''(x)=e^x-\sin x-\cos x$． ………………………………………………………………………… 5 分

设 $h(x)=e^x-x-1$，则 $h'(x)=e^x-1$，当 $x>0$ 时，$h'(x)>0$，

所以函数 $h(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故在区间 $(0,+\infty)$ 上，$h(x)>h(0)=0$，

即在区间 $(0,+\infty)$ 上 $e^x>x+1$， ……………………………………………………………… 6 分

设函数 $p(x)=x-\sin x$，则 $p'(x)=1-\cos x\geqslant 0$，所以函数 $p(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

故在区间 $(0,+\infty)$ 上 $p(x)>p(0)=0$，即在区间 $(0,+\infty)$ 上，$x>\sin x$， ………………… 7 分

所以在区间 $(0,+\infty)$ 上，$e^x>x+1>\sin x+\cos x$，即 $g''(x)=e^x-\sin x-\cos x>0$，

所以在区间 $(0,+\infty)$ 上函数 $g'(x)$ 单调递增． ……………………………………………… 8 分

当 $a\leqslant 2$ 时，$g'(0)=2-a\geqslant 0$，故在区间 $(0,+\infty)$ 上函数 $g'(x)>0$，

所以函数 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增．

又 $g(0)=0$，故 $g(x)>0$，即函数 $f(x)>ax-\sin x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立． ………… 9 分

当 $a>2$ 时，

$g'(0)=2-a<0$，

$g'[\ln(a+2)]=a+2+\cos[\ln(a+2)]-\sin[\ln(a+2)]-a=2-\sqrt{2}\sin\left(\ln(a+2)-\frac{\pi}{4}\right)>0$，

在区间 $(0,\ln(a+2))$ 上函数 $g'(x)$ 存在零点 x_0． ………………………………………… 10 分

又在区间 $(0,+\infty)$ 上函数 $g'(x)$ 单调递增，

故在区间 $(0,x_0)$ 上函数 $g'(x)<0$，所以在区间 $(0,x_0)$ 上函数 $g(x)$ 单调递减．

又 $g(0)=0$，所以在区间 $(0,x_0)$ 上函数 $g(x)<0$，与题设矛盾． …………………………… 11 分

综上，a 的取值范围为 $(-\infty,2]$． ……………………………………………………………… 12 分