2023年哈三中高三学年
第一次高考模拟考试数学试卷

考试时间：120分钟　试卷满分：150分

注意事项：

1．答题前，考生务必将自己的姓名、考生号、座位号填写在答题卡上．

2．作答时，将答案写在答题卡上．写在本试卷上无效．

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

一、选择题（共60分）

（一）单项选择题（共8小题，每小题5分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1．已知集合$M=\{y|y=2023^{x},x>1\}$，$N=\{y|y=\log_{2023}x,0<x<1\}$，则$M\cap N=$

A．$\{y|0<y<\frac{1}{2023}\}$　　B．$\{y|0<y<1\}$

C．$\{y|\frac{1}{2023}<y<1\}$　　D．$\varnothing$

2．在ΔABC中，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}>0$是$\Delta ABC$为钝角三角形的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

3．定义在R上的奇函数$f(x)$满足$f(1+x)=f(1-x)$，当$x\in[0,1]$时，

$f(x)=x^3+3x$，则$f(2023)=$

A．-4　　B．4　　C．14　　D．0

4．苏轼是北宋著名的文学家、书法家、画家，在诗词文书画等方面都有很深的造诣．《蝶恋花·春景》是苏轼一首描写春景的清新婉丽之作，表达了对春光流逝的叹息．词的下阕写到："墙里秋千墙外道．墙外行人，墙里佳人笑．笑渐不闻声渐悄，多情却被无情恼．"假如将墙看作一个平面，秋千绳、秋千板、墙外的道路看作直线，那么道路和墙面平行，当秋千静止时，秋千板与墙面垂直，秋千绳与墙面平行．在佳人荡秋千的过程中，下列说法中错误的是

A．秋千绳与墙面始终平行

B．秋千绳与道路始终垂直

C．秋千板与墙面始终垂直

D．秋千板与道路始终垂直

5．已知 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，若在直线 $y=k(x-2)$ 上存在点 P，使得 $\angle APB=90^\circ$，则实数 k 的取值范围为

A．$\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$　　B．$\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)\cup\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

C．$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$　　D．$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$

6．哈尔滨市第三中学古诗词大赛中，12 强中有 3 个种子选手，将这 12 人任意分成 3 组（每组 4 个人），则 3 个种子选手恰好被分在同一组的概率为

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{1}{55}$　　D．$\frac{3}{55}$

7．在边长为 3 的菱形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=60^0$，将 ΔABD 绕直线 BD 旋转到 $\Delta A'BD$，使得四面体 $A'BCD$ 外接球的表面积为 18π，则此时二面角 $A'-BD-C$ 的余弦值为

A．$-\frac{1}{3}$　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{3}$

8．已知 $a=\ln 1.21, b=0.21, c=e^{0.2}-1$，则

A．$a>b>c$　　B．$c>a>b$　　C．$c>b>a$　　D．$b>c>a$

（二）多项选择题（共 4 小题，每小题 5 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有选错的得 0 分）

9．已知函数 $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$，则下列说法中正确的是

A．$y=|f(x)|$ 的最小正周期为 π

B．$y=f(x)$ 的图象关于 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称

C．若 $y=f(x)$ 的图象向右平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位后关于原点对称，则 φ 的最小值为 $\frac{5}{6}\pi$

D．$f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$ 上的值域为 $[-1,1]$

10．已知圆锥 SO（O 是圆锥底面圆的圆心，S 是圆锥的顶点）的母线长为 3，底面半径为 $\sqrt{5}$．若 P,Q 为底面圆周上的任意两点，则下列说法中正确的是

A．圆锥 SO 的侧面积为 $3\sqrt{5}\pi$

B．ΔSPQ 面积的最大值为 $2\sqrt{5}$

C．三棱锥 $O-SPQ$ 体积的最大值为 $\frac{5}{3}$

D．圆锥 SO 的内切球的体积为 $\frac{4}{3}\pi$

11．已知抛物线 $C:x^2=4y$，O 为坐标原点，F 为抛物线 C 的焦点，点 P 在抛物线上，则下列说法中正确的是

A．若点 $A(2,3)$，则 $|PA|+|PF|$ 的最小值为 4

B．过点 $B(3,2)$ 且与抛物线只有一个公共点的直线有且仅有两条

C．若正三角形 ODE 的三个顶点都在抛物线上，则 ΔODE 的周长为 $8\sqrt{3}$

D．点 H 为抛物线 C 上的任意一点，$G(0,-1)$，$|HG|=t|HF|$，当 t 取最大值时，ΔGFH 的面积为 2

12．已知$a\neq 0$，$b\neq 0$且$b>-1$，$ab=(e^{a}-1)\ln(b+1)$，则下列说法中错误的是

A．$a\leq b$

B．若关于b的方程$\dfrac{1+b}{a}=m$有且仅有一个解，则$m=e$

C．若关于b的方程$\dfrac{1+b}{a}=m$有两个解b_1,b_2，则$b_1+b_2>2e$

D．当$a>0$时，$\dfrac{a}{b}<\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2b+2}$

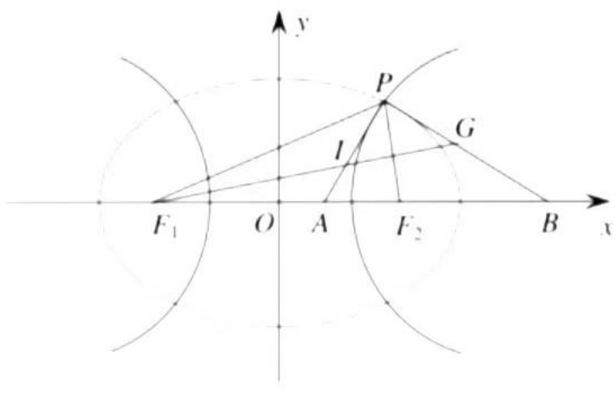
二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13．$\left(\dfrac{1}{x}-2\right)(1-2x)^4$的展开式中，常数项为__________．

14．已知$x+y=4$，且$x>y>0$，则$\dfrac{2}{x-y}+\dfrac{1}{y}$的最小值为__________．

15．设S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和，$S_n=2a_n+n-3$，令$b_n=\log_4(a_n-1)$，则$\dfrac{b_1+b_2+\cdots+b_{125}}{125}=$__________．

16．如图，椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$与双曲线$\dfrac{x^2}{m^2}-\dfrac{y^2}{n^2}=1(m>0,n>0)$有公共焦点$F_1(-c,0),F_2(c,0)(c>0)$，椭圆的离心率为$e_1$，双曲线的离心率为$e_2$，点$P$为两曲线的一个公共点，且$\angle F_1PF_2=60^0$，则$\dfrac{1}{e_1^2}+\dfrac{3}{e_2^2}=$__________；$I$为$\Delta F_1PF_2$的内心，$F_1,I,G$三点共线，且$\overrightarrow{GP}\cdot\overrightarrow{IP}=0$，$x$轴上点$A,B$满足$\overrightarrow{AI}=\lambda\overrightarrow{IP}$，$\overrightarrow{BG}=\mu\overrightarrow{GP}$，则$\lambda^2+\mu^2$的最小值为__________．



三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（本题满分 10 分）

已知$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，设$\triangle ABC$外接圆的半径为R，

且$bc=2R^2(1+2\cos B\cos C)$．

（1）求角A的大小；

（2）若D为BC边上的点，$AD=BD=2$，$CD=1$，求$\tan B$．

18．（本题满分 12 分）

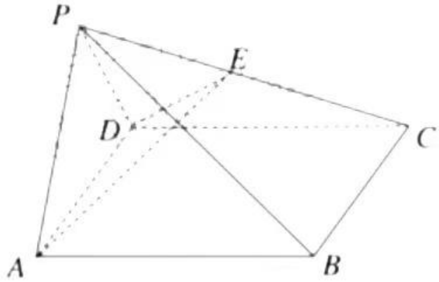
已知递增等差数列$\{a_n\}$满足：$a_2+a_6+a_7=27$，a_1,a_2,a_5成等比数列．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若$b_n=\dfrac{a_n\cdot 2^{\frac{a_n+1}{2}}}{a_{n+1}a_{n+2}}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$．

19.（本题满分 12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，$\triangle PAD$ 为等边三角形，平面$PAD\perp$平面$ABCD$，$PB\perp BC$.



（1）求点 A 到平面 PBC 的距离；

（2）E 为线段 PC 上一点，若直线 AE 与平面 $ABCD$ 所成的角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$，求平面 ADE 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值.

20．（本题满分 12 分）

在数学探究实验课上，小明设计了如下实验：在盒子中装有红球、白球等多种不同颜色的小球，现从盒子中一次摸一个球，不放回．

（1）若盒子中有 8 个球，其中有 3 个红球，从中任意摸两次．

①求摸出的两个球中恰好有一个红球的概率；

②记摸出的红球个数为 X，求随机变量 X 的分布列和数学期望．

（2）若 1 号盒中有 4 个红球和 4 个白球，2 号盒中有 2 个红球和 2 个白球，现甲、乙、丙三人依次从 1 号盒中摸出一个球并放入 2 号盒，然后丁从 2 号盒中任取一球．已知丁取到红球，求甲、乙、丙三人中至少有一人取出白球的概率．

21．（本题满分 12 分）

已知平面内动点 M 到定点 $F(0,1)$ 的距离和到定直线 $y=4$ 的距离的比为定值 $\frac{1}{2}$．

（1）求动点 M 的轨迹方程；

（2）设动点 M 的轨迹为曲线 C，过点 $(1,0)$ 的直线交曲线 C 于不同的两点 A、B，过点 A、B 分别作直线 $x=t$ 的垂线，垂足分别为 A_1、B_1，判断是否存在常数 t，使得四边形 AA_1B_1B 的对角线交于一定点？若存在，求出常数 t 的值和该定点坐标；若不存在，说明理由．

22.（本题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\ln x-ax^2+x+1$.

（1）当 $a=0$ 时，求函数 $g(x)=xe^x-f(x)$ 的最小值；

（2）当 $y=f(x)$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=1$ 时，求 a 的值，并证明：

当 $n\in N^*$ 时，$\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{1}{k})^k<(\sqrt{n}+1)^2-2$.