理科数学试卷

注意事项：

1. 答题前，考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号在答题卡上填写清楚.

2. 每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 在试题卷上作答无效.

3. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回. 满分 150 分，考试用时 120 分钟.

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知复数 $z=\dfrac{1+3i}{i}$，则 $|z|$ 为

A. 2　　B. 4　　C. $\sqrt{10}$　　D. 10

2. 已知集合 $A=\{x\mid y=\log_2(3-x)+2\}$，集合 $B=\{y\mid y=2^x\}$，则 $A\cap \complement_{R}B=$

A. $(-\infty, 0]$　　B. $(-\infty, 3)$　　C. $[0, 3)$　　D. $(3, +\infty)$

3. 袁隆平院士是中国杂交水稻事业的开创者，是当代神农. 50 多年来，他始终在农业科学的第一线辛勤耕耘、不懈探索，为人类运用科技手段战胜饥饿带来了绿色的希望和金色的收获. 袁老的科研团队发现“野败”后，将其带回实验，在试验田中随机抽取了 100 株水稻. 统计每株水稻的稻穗数(单位：颗)得到如图 1 所示的频率分布直方图(同一组中的数据用该组区间的中点值代表)，则下列说法错误的是

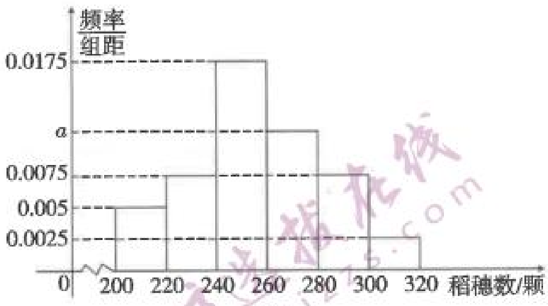


图 1

A. $a=0.01$

B. 这 100 株水稻的稻穗数平均值在区间[280，300)中

C. 这 100 株水稻的稻穗数的众数是 250

D. 这 100 株水稻的稻穗数的中位数在区间[240，260)中

4. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，且满足 $S_{10}=10$，$S_{30}=18$，则 $S_{20}=$

A. 14　　B. 15　　C. 16　　D. 17

5. 已知 M，N 分别是线段 OA，OB 上的点，且 $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{ON}=2\overrightarrow{NB}$，若 $\overrightarrow{MN}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，则 $\lambda+\mu=$

A. 1　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{1}{6}$　　D. $\dfrac{1}{3}$

6. 某三棱锥的三视图如图 2 所示，是三个边长为 2 的正方形，则该三棱锥的体积为

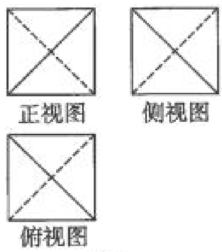


图 2

A. $\dfrac{4}{3}$

B. $\dfrac{8}{3}$

C. 6

D. $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

7. 已知曲线 $y=a^x$ 和 $y=\log_a x$ 与直线 $y=x$ 相切于同一点 P，则大于 1 的 a 的值为（下列 e=2.71828…是自然对数的底数）

A. e^2　　B. $e^{\frac{1}{2}}$

C. e^e　　D. $e^{\frac{1}{e}}$

8. 已知椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，$F$ 是椭圆的左焦点，P 是椭圆上一点，若椭圆内一点 $A(1,1)$，则 $|PA|+|PF|$ 的最小值为

A. 3　　B. $\sqrt{10}$

C. $\sqrt{5}+\frac{1}{2}$　　D. $\sqrt{5}+1$

9. 已知函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}-x-\frac{k}{x}+2e$ 有且只有一个零点，则 k 的值为

A. $e+\frac{1}{e}$　　B. $e+\frac{1}{e^2}$

C. $e^2+\frac{1}{e}$　　D. $e^2+\frac{1}{e^2}$

10. 哥德巴赫猜想是“每个大于 2 的偶数可以表示为两个素数（素数指大于 1 的自然数中，除了 1 和它本身以外不再有其他因数的自然数）的和”，如 18=7+11，在不超过 44 的素数中，随机选取两个不同的数，其和等于 44 的概率是

A. $\frac{1}{39}$　　B. $\frac{1}{33}$

C. $\frac{1}{26}$　　D. $\frac{3}{91}$

11. 双曲线 C：$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{8}=1$，已知 O 是坐标原点，A 是双曲线 C 的斜率为正的渐近线与直线 $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 的交点，F 是双曲线 C 的右焦点，D 是线段 OF 的中点，若 B 是圆 $x^2+y^2=1$ 上的一点，则 $\triangle ABD$ 的面积的最小值为

A. $\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{2\sqrt{6}-3}{3}$

C. 2　　D. $\frac{\sqrt{3}-1}{3}$

12. 已知底面边长为 2 的正四棱锥 $O-ABCD$ 的侧棱长为 $\sqrt{6}$，E，F 分别为 AB，BC 的中点，点 P，Q 在底面 $ABCD$ 内，且 Q 在线段 DE 上，过顶点 O 平行于底面 $ABCD$ 的平面为 α，F 在平面 α 内的射影为 G，PG 长度为 $\sqrt{5}$，则 PQ 长度的最小值是

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{2}-1$

C. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{3\sqrt{5}}{5}-1$

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+3y\geqslant 4,\\ x-y\leqslant 1,\end{cases}$ 则 $z=x+2y$ 的最小值为________.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_n=2na_n-1$，则 $a_4=$________.

15. 洛书，古称龟书，是阴阳五行术数之源，在古代传说中有神龟出于洛水，其甲壳上心有此图象如图 3，结构是戴九履一，左三右七，二四为肩，六八为足，以五居中，五方白圈皆阳数，四角黑点为阴数（图中白圈为阳数，黑点为阴数），现利用阴数和阳数构成一个四位数，规则如下：（从左往右数）第一位数是阳数，第二位数是阴数，第三位数和第四位数一阴一阳和为 7，则这样的四位数有________个.

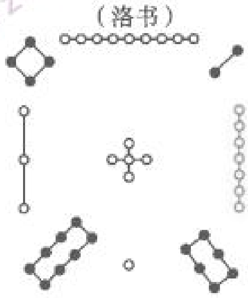


图 3

16. 设函数 $f(x)=\cos\left(\omega x+\varphi-\dfrac{\pi}{2}\right)$，其中 $\omega>0$，$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，若 $-\dfrac{\pi}{4}$ 和 $\dfrac{\pi}{4}$ 分别是函数 $f(x)$ 的零点和极值点，且 $f(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{18},\dfrac{5\pi}{36}\right)$ 上单调，则 ω 的所有可能的取值构成的集合为________.

三、解答题（共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 12 分）

椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率是 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且点 $A(2，1)$ 在椭圆 C 上，O 是坐标原点.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）直线 l 过原点，且 $l\perp OA$，若 l 与椭圆 C 交于 B、D 两点，求弦 BD 的长度.

18.（本小题满分 12 分）

$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 2.

（1）若 $b=2$ 且 $b+c=2a\cos B$，求角 A；

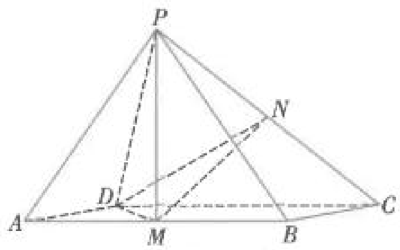
（2）若 $A=\theta$，求 $\triangle ABC$ 面积的最大值（结果用 θ 表示）.

19.（本小题满分 12 分）

如图 4，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为平行四边形，$\angle BAD=\dfrac{\pi}{3}$，$AB=4$，$BC=1$，$M$，$N$ 分别是 AB，PC 的中点，$AD\perp PD$.

（1）证明：平面 $PDM\perp$ 平面 PBC；

（2）若 $PM\perp MD$，$PC=\sqrt{15}$，求二面角 $P-DM-N$ 的余弦值.



20.（本小题满分 12 分）

一个盒子里有 9 个球，其中有 6 个白球，3 个黑球．现每次从盒子洞口随机摸出一个球且不放回，如果 9 个球都被摸出，以 X 表示 6 个白球被 3 个黑球所隔成的段数．例如，摸出顺序为“白黑白白黑白白白黑”，则此时 $X=3$，摸出顺序为“黑黑黑白白白白白白”，则此时 $X=1$.

（1）求三个黑球相连在一起被摸出的概率；

（2）求 X 的分布列和数学期望.

21.（本小题满分 12 分）

已知 x_1，x_2 是函数 $f(x)=a\ln(x+1)+x^2$ 的两个极值点，且 $x_1<x_2$.

（1）求实数 a 的取值范围；

（2）证明：$0<\dfrac{f(x_2)}{x_1}<\ln2-\dfrac{1}{2}$.

请考生在第 22、23 两题中任选一题作答，并用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目的题号涂黑．注意所做题目的题号必须与所涂题目的题号一致，在答题卡选答区域指定位置答题．如果多做，则按所做的第一题计分.

22.（本小题满分 10 分）【选修 4-4：坐标系与参数方程】

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y=\dfrac{4t^2}{1+2t^2+t^4}, \end{cases}$（$t$ 为参数）．以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $m\rho\cos\theta-2\rho\sin\theta-1=0$（$m$ 为参数）.

（1）求曲线 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程；

（2）直线 l 过定点 P，Q 为曲线 C 上的点，求 $|PQ|$ 的最小值.

23.（本小题满分 10 分）【选修 4-5：不等式选讲】

已知函数 $f(x)=|x^2-3x|+|x|$.

（1）求不等式 $f(x)\geqslant3$ 的解集；

（2）若 $f(x)=|x^2-2x|$，求 x 的取值范围.

理科数学参考答案

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	A	B	C	C	B	D	A	C	D	A	D

【解析】

1．$z=3-\mathrm{i}$，$|z|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$，故选 C.

2．因为 $A=\{x\,|\,y=\log_2(3-x)+2\}=(-\infty,\ 3)$，$B=\{y\,|\,y=2^x\}=(0,\ +\infty)$，则 $\complement_{\mathrm{R}}B=(-\infty,\ 0]$，所以 $A\cap\complement_{\mathrm{R}}B=(-\infty,\ 0]$，故选 A．

3．根据频率分布直方图知：组距为 20，所以 $a=\dfrac{1}{20}-0.0175-0.0075\times2-0.005-0.0025=0.01$，故 A 选项正确；这 100 株水稻的稻穗数平均值 $\bar{x}=20\times(0.005\times210+0.0075\times230+0.0175\times250+0.01\times270+0.0075\times290+0.0025\times310)=256$，可知这 100 株水稻的稻穗数平均值在区间 $[240,\ 260)$ 中，故 B 选项错误；由频率分布直方图知第三个矩形最高，所以这 100 株水稻的稻穗数的众数是 250，故 C 选项正确；前两个矩形的面积是 $0.25<0.5$，前三个矩形的面积是 $0.6>0.5$，所以中位数在第三组数据中，即这 100 株水稻的稻穗数的中位数在区间 $[240,\ 260)$ 中，故选项 D 正确，故选 B.

4．设等差数列的首项为 a_1，公差为 d，$S_n=\dfrac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$，$\because S_{10}=10,\ S_{30}=18$，

$\therefore\begin{cases}\dfrac{10(2a_1+9d)}{2}=10,\\[2mm]\dfrac{30(2a_1+29d)}{2}=18,\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}a_1=\dfrac{59}{50},\\[2mm]d=-\dfrac{1}{25},\end{cases}$ 则 $S_{20}=\dfrac{20(2a_1+19d)}{2}=16$，故选 C．

5．由 $\overrightarrow{MN}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$ 得，$\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，又 $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{MA},\ \overrightarrow{ON}=2\overrightarrow{NB}$，所以 $\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，于是 $\lambda=-\dfrac{1}{2}$ 且 $\mu=\dfrac{2}{3}$，得 $\lambda+\mu=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{6}$，故选 C.

6．根据三视图知，三棱锥是一个正四面体，它的体积等于正方体的体积减去正方体四个角处三棱锥的体积，记每一个角处三棱锥的体积为 V_1，则 $V=V_{正方体}-4V_1=8-4\times\dfrac{1}{3}\times2\times2\times2\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{8}{3}$，故选 B. 微信搜《高三答案公众号》

7．依题意，直线 $y=x$ 是两条曲线 $y=a^x$，$y=\log_a x$ 的公切线，切点为 P，设 $P(x_0,\ x_0)$，因为 $(a^x)'=a^x\ln a$，$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$，且公切线的斜率为 1，所以 $\begin{cases} a^{x_0}\ln a=1 & (1), \\ \dfrac{1}{x_0\ln a}=1 & (2), \end{cases}$ 由(2)得，$\dfrac{1}{\ln a}=x_0$，即 $x_0=\dfrac{\ln e}{\ln a}$，据换底公式，$x_0=\log_a e$，将此式代入(1)得，$a^{\log_a e}\ln a=1$，即 $e\ln a=1$，解得 $a=e^{\frac{1}{e}}$，故选 D．

8．设椭圆的右焦点为 F_2，$|PA|+|PF|=|PA|+4-|PF_2|=4+|PA|-|PF_2|$，又 $||PA|-|PF_2||\leqslant|AF_2|$，$-|AF_2|\leqslant|PA|-|PF_2|\leqslant|AF_2|$，当 $P,\ A,\ F_2$ 三点共线时取等号，$|PA|+|PF|$ 的最小值为 3，故选 A．

9．由题知，方程 $\dfrac{\ln x}{x^2}-x-\dfrac{k}{x}+2e=0\Leftrightarrow k=\dfrac{\ln x}{x}-x^2+2ex$ 有且只有一个解，令 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}-x^2+2ex(x>0)$，即直线 $y=k$ 与曲线 $y=g(x)$ 有且只有一个交点，$g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}-2x+2e=\left(\dfrac{1-\ln x}{x^2}\right)+2(e-x)$，当 $0<x<e$ 时，$\dfrac{1-\ln x}{x^2}>0,\ 2(e-x)>0$，则 $g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(0,\ e)$ 上单调递增，当 $x>e$ 时，$\dfrac{1-\ln x}{x^2}<0,\ 2(e-x)<0$，则 $g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(e,\ +\infty)$ 上单调递减，$g(x)_{\max}=g(e)=e^2+\dfrac{1}{e}$，当 $x\to0$ 时，$g(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to-\infty$，所以 $k=e^2+\dfrac{1}{e}$，故选 C．

10．不超过 44 的素数有 2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37、41、43，共 14 个，满足“和”等于 44 的有(3，41)，(7，37)，(13，31)共有 3 组，$P=\dfrac{3}{C_{14}^2}=\dfrac{3}{91}$，故选 D．

11．据题意点 A 的坐标是 $\left(\dfrac{2}{\sqrt3},\ \dfrac{2\sqrt2}{\sqrt3}\right)$，点 D 是线段 OF 的中点，则 $D(\sqrt3,\ 0)$，$\therefore|AD|=\sqrt3$，直线 AD 的方程为 $y=-2\sqrt2(x-\sqrt3)$，点 B 是圆 $x^2+y^2=1$ 上的一点，点 B 到直线 AD 距离的最小值 $d_{\min}$ 也就是圆心 O 到直线 AD 的距离 d 减去半径，即 $d-1$，$d_{\min}=d-1=\dfrac{|-2\sqrt6|}{\sqrt{1+8}}-1$

$=\frac{2\sqrt{6}}{3}-1=\frac{2\sqrt{6}-3}{3}$，则 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\cdot|AD|\cdot d_{\min}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{2\sqrt{6}-3}{3}=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$，故选 A．

12．由题可得正四棱锥 $O-ABCD$ 的高为 2，故可将正四棱锥 $O-ABCD$ 放置在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，如图 1 所示，易得线段 B_1C_1 的中点即为 G 点，连接 GF，PF，PG，则 $GF\perp PF$，进而，$PF=\sqrt{PG^2-FG^2}=\sqrt{5-4}=1$，所以在平面 $ABCD$ 内，点 P 的轨迹是以 F 为圆心、以 1 为半径的圆，参考图 2 据平面几何知识不难算出圆心 F 到线段 DE 的距离为 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$，所以 PQ 长度的最小值为 $\frac{3\sqrt{5}}{5}-1$，故选 D．

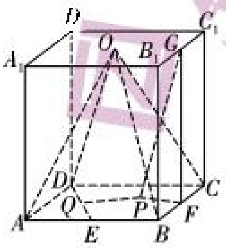


图 1

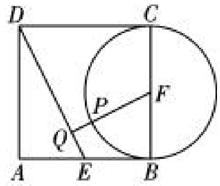


图 2

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	$\frac{11}{5}$	$\frac{16}{35}$	120	{1，3，5，9}

【解析】

13．作出可行域，如图 3 中阴影部分所示，由 $\begin{cases}2x+3y=4,\\x-y=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{7}{5},\\y=\frac{2}{5},\end{cases}$ 故 $A\left(\frac{7}{5},\ \frac{2}{5}\right)$，作出直线 $x+2y=0$，数形结合可知，当直线 $z=x+2y$ 过点 $A\left(\frac{7}{5},\ \frac{2}{5}\right)$ 时，$z=x+2y$ 取得最小值为 $\frac{11}{5}$．

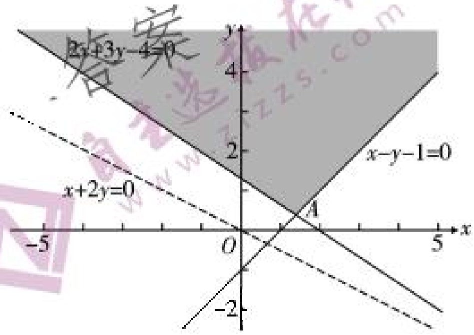


图 3

14．当 $n=1$ 时，$a_1=1$；当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2na_n-2(n-1)a_{n-1}$，$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{2n-2}{2n-1}$，又 $a_4=\frac{a_4}{a_3}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1=\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{16}{35}$．

15．据题意，阳数为：1，3，5，7，9，阴数为：2，4，6，8，第一位数的选择有 5 种，第二位数的选择有 4 种，第三位数和第四位数可以的组合有(1，6)，(2，5)，(3，4)，(4，3)，(5，2)，(6，1)共有 6 种选择，根据乘法原理，这样的四位数共有 $5\times4\times6=120$ 个．

16．由题得 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$，记函数 $f(x)$ 的最小正周期为 T，则 $f(x)$ 的零点与极值点之间的距离：$\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=n\cdot\frac{T}{2}+\frac{T}{4},\ n\in\mathbf{N}$，从而 $\omega=2n+1,\ n\in\mathbf{N}$，而函数 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{18},\ \frac{5\pi}{36}\right)$ 上单调，因此任何极值点都不在区间 $\left(\frac{\pi}{18},\ \frac{5\pi}{36}\right)$ 内，因为 $\frac{\pi}{4}$ 是函数 $f(x)$ 的一个极值点，所以 $f(x)$ 的极值点为 $\frac{k\pi}{2n+1}+\frac{\pi}{4},\ k\in\mathbf{Z}$，从而 $\forall k\in\mathbf{Z}$，$\frac{k\pi}{2n+1}+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{18}$ 或 $\frac{k\pi}{2n+1}+\frac{\pi}{4}\geqslant\frac{5\pi}{36}$，亦即 $\forall k\in\mathbf{Z}$，$\frac{k}{2n+1}\leqslant-\frac{7}{36}$ 或 $\frac{k}{2n+1}\geqslant-\frac{1}{9}$，容易验证当 $n=0,\ 1,\ 2,\ 4$ 时符合题意，当 $n=3,\ 5$ 时不符合题意，而当 $n\geqslant6$ 时，有 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{2n+1}\leqslant\frac{2\pi}{13}<2\left(\frac{5\pi}{36}-\frac{\pi}{18}\right)$，也不符合题意．综上所述，$\omega$ 的所有可能的取值构成的集合为 $\{1,\ 3,\ 5,\ 9\}$．

三、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 12 分）

解：（1）$e=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow c=\frac{\sqrt{3}}{2}a,\ b=\frac{1}{2}a$，点 $A(2,\ 1)$ 在椭圆上，

所以 $\frac{4}{a^2}+\frac{1}{\frac{a^2}{4}}=1$，得 $a=2\sqrt{2}$，从而 $b=\sqrt{2}$．

所以椭圆的方程是 C：$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$． ……………………………………（6 分）

（2）直线 OA 的方程是 $y=\frac{1}{2}x$，因为 $l\perp OA$，且 l 过点 O，

所以直线 l 的方程是 l：$y=-2x$，与椭圆联立得 $17x^2=8\Rightarrow x=\pm\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$，

所以 B、D 两点的坐标分别为 $B\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}},\ -\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{17}}\right)$，$D\left(-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}},\ \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{17}}\right)$，

则 $|BD|=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}}\right)^2+\left(\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{17}}+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{17}}\right)^2}=\frac{4\sqrt{170}}{17}$． ……………………………（12 分）

18.（本小题满分 12 分）

解：（1）由 $b+c=2a\cos B$ 知 $\cos B>0 \Rightarrow B\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，

由正弦定理得 $\sin B+\sin C=2\sin A\cos B$，

将 $C=\pi-(A+B)$ 代入该式化简后得 $\sin B=\sin(A-B)$，

由于 A，B，C 是三角形的内角，微信搜《高三答案公众号》

则 $A=2B$ 或者 $\pi-B=A-B$，舍去 $\pi-B=A-B$，

故 $A=2B$，$\triangle ABC$ 外接圆的半径为 2，即 $R=2$，且 $b=2$，

由正弦定理得 $\dfrac{b}{\sin B}=2R=4$，

所以 $\sin B=\dfrac{1}{2}$，且 $B\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，

所以 $B=\dfrac{\pi}{6}$，故 $A=2B=\dfrac{\pi}{3}$． ………………………………………………………（6 分）

（2）因为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 2，即 $R=2$，且 $A=\theta$，

由正弦定理得 $\dfrac{a}{\sin\theta}=2R=4$，所以 $a=4\sin\theta$，

由余弦定理知 $b^2+c^2=a^2+2bc\cos\theta$，根据基本不等式有 $b^2+c^2\geqslant 2bc$，

所以 $a^2+2bc\cos\theta\geqslant 2bc\Rightarrow bc\leqslant\dfrac{a^2}{2(1-\cos\theta)}=\dfrac{8\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$，当 $b=c$ 时取等．

$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin\theta\leqslant\dfrac{4\sin^3\theta}{1-\cos\theta}=4\sin\theta(1+\cos\theta)$，

所以 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $4\sin\theta(1+\cos\theta)$ $(0<\theta<\pi)$． ……………………………（12 分）

19.（本小题满分 12 分）

（1）证明：由题得 $AM=2$，$\angle BAD=\dfrac{\pi}{3}$，$AD=1$，在 $\triangle ADM$ 中，

由余弦定理得 $DM=\sqrt{3}$，所以 $\triangle ADM$ 是直角三角形，即 $AD\perp DM$，

又 $AD\perp PD$，且 $DM\cap PD=D$，所以 $AD\perp$ 平面 PDM，

因为 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $BC/\!/AD$，

所以 $BC\perp$ 平面 PDM，且 $BC\subset$ 平面 PBC，

故平面 $PDM\perp$ 平面 PBC． ………………………………………………………（6 分）

（2）解：由（1）知 $AD\perp$ 平面PDM，$PM\subset$ 平面PDM，

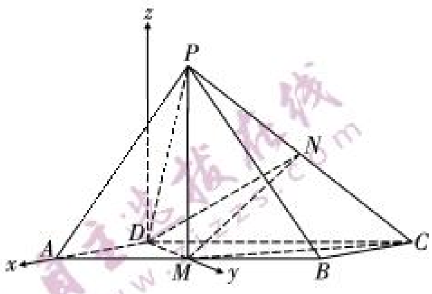


图 4

$\therefore PM\perp AD$，又 $PM\perp MD$，$AD\cap MD=D$，

所以 $PM\perp$ 平面$ABCD$，且 $AD\perp DM$，

以 D 为原点，分别以 DA，DM 及平行于 MP 所在的直线为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系（如图 4 所示），

连接 MC，在平行四边形 $ABCD$ 中，易得 $MC=\sqrt{7}$，

在直角三角形 PMC 中，$PM=\sqrt{PC^2-MC^2}=\sqrt{15-7}=2\sqrt{2}$，

于是，$M(0,\ \sqrt{3},\ 0)$，$P(0,\ \sqrt{3},\ 2\sqrt{2})$，$C(-2,\ 2\sqrt{3},\ 0)$，

因为 N 是 PC 的中点，所以 $N\left(-1,\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ \sqrt{2}\right)$，

设平面 NDM 的法向量 $\vec{n}=(x,\ y,\ z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DM}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DN}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x,\ y,\ z)\cdot(0,\ \sqrt{3},\ 0)=0,\\ (x,\ y,\ z)\cdot\left(-1,\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ \sqrt{2}\right)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{3}y=0,\\ -x+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}y+\sqrt{2}z=0,\end{cases}$

取 $z=\sqrt{2}$ 得，$\vec{n}=(2,\ 0,\ \sqrt{2})$，

由（1）知 x 轴 $\perp$ 平面PDM，所以平面 PDM 的法向量 $\vec{m}=(1,\ 0,\ 0)$，

设二面角 $P-DM-N$ 的平面角为 θ，

则 $\cos\theta=\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}||\vec{m}|}=\dfrac{(2,\ 0,\ \sqrt{2})\cdot(1,\ 0,\ 0)}{\sqrt{4+0+2}\times 1}=\dfrac{2+0+0}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

故所求二面角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$． ……………………………………………（12 分）

20.（本小题满分 12 分）

解：（1）设“三个黑球相连在一起被摸出”为事件 A，则 $P(A)=\dfrac{3!\cdot 7!}{9!}=\dfrac{1}{12}$，

故三个黑球相连在一起被摸出的概率为 $\dfrac{1}{12}$． ……………………………………（4 分）

（2）由题意可知 X 的所有可能取值为1、2、3、4，

$P(X=1)=\frac{4!\cdot 6!}{9!}=\frac{1}{21}$，

$P(X=2)=\frac{3!\cdot 6!\cdot(2\times C_5^1+C_2^1\times C_2^1\times C_5^1)}{9!}=\frac{5}{14}$，

$P(X=3)=\frac{3!\cdot 6!\cdot(A_5^2+C_2^1\times C_5^2)}{9!}=\frac{10}{21}$，

$P(X=4)=\frac{6!\cdot A_5^3}{9!}=\frac{5}{42}$，　　…………………………………………（8分）

则 X 的分布列为：

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{42}$

所以 $E(X)=1\times\frac{1}{21}+2\times\frac{5}{14}+3\times\frac{10}{21}+4\times\frac{5}{42}=\frac{8}{3}$．…………………………………………（12分）

21．（本小题满分12分）微信搜《高三答案公众号》

（1）解：$f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，$f'(x)=\frac{a}{x+1}+2x=\frac{2x^2+2x+a}{x+1}$，

令 $g(x)=2x^2+2x+a(x>-1)$，依题意 $g(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 内有两个变号零点，

则方程 $2x^2+2x+a=0$ 的判别式 $\Delta=4-8a>0$，且 $g(-1)>0$，解得 $a<\frac{1}{2}$，且 $a>0$，

故 $a\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$．　　…………………………………………（4分）

（2）证明：由（1）及韦达定理得 $x_1+x_2=-1$，$x_1x_2=\frac{a}{2}>0\Rightarrow x_1=-1-x_2$，$a=2x_1x_2$，

因为函数 $g(x)=2x^2+2x+a(x>-1)$ 图象的对称轴为 $x=-\frac{1}{2}$，

所以 $-1<x_1<-\frac{1}{2}<x_2<0$，即 $x_2\in\left(-\frac{1}{2},0\right)$，

$\frac{f(x_2)}{x_1}=\frac{a\ln(x_2+1)+x_2^2}{x_1}=\frac{2x_1x_2\ln(x_2+1)+x_2^2}{x_1}=2x_2\ln(x_2+1)-\frac{x_2^2}{1+x_2}$，

其中$x_2\in\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$，令$h(x)=2x\ln(x+1)-\frac{x^2}{1+x}\left(-\frac{1}{2}<x<0\right)$，

$h'(x)=2\ln(x+1)+\frac{2x}{x+1}-\frac{2x(1+x)-x^2}{(1+x)^2}=2\ln(1+x)+\frac{x^2}{(1+x)^2}$，

令$H(x)=2\ln(1+x)+\frac{x^2}{(1+x)^2}$，

$H'(x)=\frac{2}{1+x}+\frac{2x(1+x)^2-2(1+x)x^2}{(1+x)^4}=\frac{2}{1+x}+\frac{2x}{(1+x)^3}=\frac{2(x^2+3x+1)}{(1+x)^3}$，

又函数$y=x^2+3x+1$在$\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$上是单调递增的，且$H'(0)=2>0$，$H'\left(-\frac{1}{2}\right)=-4<0$，

∴存在$x_0\in\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$，使得在$\left(-\frac{1}{2},\ x_0\right)$上有$H'(x)<0$，$H(x)$单调递减；

在$(x_0,\ 0)$上，$H'(x)>0$，$H(x)$单调递增，$H(0)=0$，$H\left(-\frac{1}{2}\right)=1-2\ln 2<0$，

∴$H(x)<0$，即$h'(x)<0$，所以$h(x)$单调递减，

因为$-\frac{1}{2}<x<0$，所以$h(0)<h(x)<h\left(-\frac{1}{2}\right)$，

则$0<h(x)<\ln 2-\frac{1}{2}$，不等式$0<\frac{f(x_2)}{x_1}<\ln 2-\frac{1}{2}$得证．……………………………（12 分）

22．（本小题满分 10 分）【选修 4−4：坐标系与参数方程】

解：（1）因为$x^2+y=\frac{1+2t^2+t^4}{1+2t^2+t^4}=1(-1<x\leqslant 1)$，

曲线C的普通方程为$y=-x^2+1(-1<x\leqslant 1)$，

l的直角坐标方程为$mx-2y-1=0$．……………………………………………………（5 分）

（2）l过定点$P\left(0,\ -\frac{1}{2}\right)$，设曲线$C$上的点$Q(x,\ -x^2+1)$，且$-1<x\leqslant 1$，

则$|PQ|=\sqrt{x^2+\left(x^2-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{x^4-2x^2+\frac{9}{4}}=\sqrt{(x^2-1)^2+\frac{5}{4}}\geqslant\frac{\sqrt{5}}{2}$，

当且仅当$x=1$时取得最小值$\frac{\sqrt{5}}{2}$．……………………………………………………（10 分）

23．（本小题满分 10 分）【选修 4−5：不等式选讲】

解：（1） $f(x)=\begin{cases}x^2-2x, & x\geqslant 3,\\ 4x-x^2, & 0<x<3,\\ x^2-4x, & x\leqslant 0,\end{cases}$

当 $x\geqslant 3$ 时，$x^2-2x\geqslant 3$，解得 $x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant -1$，

又 $x\geqslant 3$，所以 $x\geqslant 3$；

当 $0<x<3$ 时，$4x-x^2\geqslant 3$，解得 $1\leqslant x\leqslant 3$，

又 $0<x<3$，所以 $1\leqslant x<3$；

当 $x\leqslant 0$ 时，$x^2-4x\geqslant 3$，解得 $x\geqslant 2+\sqrt{7}$ 或 $x\leqslant 2-\sqrt{7}$，

又 $x\leqslant 0$，所以 $x\leqslant 2-\sqrt{7}$．

综上，原不等式的解集为 $\{x\,|\,x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant 2-\sqrt{7}\}$． ……………………………………（5 分）

（2）由绝对值三角不等式可得 $f(x)\geqslant|x^2-2x|$，当且仅当 $(x^2-3x)\cdot x\geqslant 0$ 时取等号，

故解得 $x\geqslant 3$ 或 $x=0$． ……………………………………………………（10 分）

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于中国拔尖人才培养的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户（官方网址：www.zizzs.com）、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承‘’专业、专注、有态度‘’的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+ 大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网 “年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的新高考拔尖人才培养服务平台。