广州市 2023 届高三年级阶段测试

数学试卷

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．若全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$A=\{1,2,3,5\}$，$B=\{1,2,4,6,7,8\}$，则 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=$（　　）

A．$\varnothing$　　B．$\{3,4,5,6,7,8,9\}$　　C．$\{9\}$　　D．$\{1,2\}$

2．若 $x>0$，$y>0$，且 x，a，b，y 成等差数列，x，c，d，y 成等比数列，则 $\dfrac{(a+b)^2}{cd}$ 的最小值是（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．4

3．记 p:“方程 $(m-1)x^2+(3-m)y^2=1$ 表示椭圆”，q:“函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+(m-2)x^2+x$ 无极值”，则 p 是 q 的（　　）

A．充要条件　　B．充分不必要条件　　C．必要不充分条件　　D．既不充分也不必要条件

4．如右图，2008 年北京奥运会游泳中心（水立方）的设计灵感来于威尔•弗兰泡沫，威尔•弗兰泡沫是对开尔文胞体的改进，开尔文胞体是一种多面体，它由正六边形和正方形围成（其中每一个顶点处都有一个正方形和两个正六边形），已知该多面体有 24 个顶点，且棱长为 1，则该多面体的表面积是（　　）

开尔文胞体

A．$6+12\sqrt{3}$　　B．$8+12\sqrt{3}$　　C．$6+9\sqrt{3}$　　D．$8+9\sqrt{3}$

5．4 名同学各掷了 5 次骰子，分别记录每次骰子出现的点数．若下列是根据 4 名同学各自的统计结果的数字特征，则可以判断出一定没有出现点数 6 的是（　　）

A．平均数为 3，中位数为 2　　B．中位数为 3，众数为 2
C．中位数为 3，方差为 2.8　　D．平均数为 2，方差为 2.4

6．$(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^9$ 的展开式中 x^2 的系数是（　　）

A．45　　B．84　　C．120　　D．210

7．若空间中经过定点 O 的三个平面 α，β，γ 两两垂直，过另一定点 A 作直线 l 与这三个平面的夹角都相等，过定点 A 作平面 δ 和这三个平面所夹的锐二面角都相等．记所作直线 l 的条数为 m，所作平面 δ 的个数为 n，则 $m+n=$（　　）

A．4　　B．8　　C．12　　D．16

8．设 $a=\ln 1.1$，$b=e^{0.1}-1$，$c=\tan 0.1$，$d=\dfrac{0.4}{\pi}$，则（　　）

A．$a<b<c<d$　　B．$a<c<b<d$　　C．$a<b<d<c$　　D．$a<c<d<b$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．18 世纪末期，挪威测量学家韦塞尔首次利用坐标平面上的点来表示复数，使复数及其运算具有了几何意义，例如 $|z|=|\overrightarrow{OZ}|$，也即复数的模的几何意义为 z 对应的点 z 到原点 O 的距离．下列说法正确的有（　　）

A．若 $|z|=1$，则 $z=\pm 1$ 或 $z=\pm \mathrm{i}$

B．复数 $6+5\mathrm{i}$ 与 $-3+4\mathrm{i}$ 分别对应向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$，则向量 $\overrightarrow{BA}$ 对应的复数为 $9+\mathrm{i}$

C．若点 Z 的坐标为 $(-1,1)$，则 $\bar{z}$ 对应的点在第三象限

D．若复数 z 满足 $1\le |z|\le \sqrt{2}$，则复数 z 对应的点所构成的图形面积为 π

10．若 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$，则下列说法正确的有（　　）

A．$f(x)$ 的最小正周期是 π　　B．方程 $x=-\dfrac{\pi}{2}$ 是 $f(x)$ 的一条对称轴

C．$f(x)$ 的值域为 $[1,\sqrt{2}]$

D．$\exists a$，$b>0$，对 $\forall x\in R$ 都满足 $f(x+a)+f(a-x)=2b$，（a，b 是实常数）

11．已知抛物线 $y^2=2px$ 上的四点 $A(2,2)$，B，C，P，直线 AB，AC 是圆 $M:(x-2)^2+y^2=1$ 的两条切线，直线 PQ、PR 与圆 M 分别切于点 Q、R，则下列说法正确的有（　　）

A．当劣弧 QR 的弧长最短时，$\cos\angle QPR=-\dfrac{1}{3}$　　B．当劣弧 QR 的弧长最短时，$\cos\angle QPR=\dfrac{1}{3}$

C．直线 BC 的方程为 $x+2y+1=0$　　D．直线 BC 的方程为 $3x+6y+4=0$

12．已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 R，对任意的 x，$y\in R$，恒有 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(y)$，则下列说法正确的有（　　）

A．$f(0)=1$　　B．$f'(x)$ 必为奇函数　　C．$f(x)+f(0)\ge 0$　　D．若 $f(1)=\dfrac{1}{2}$，则 $\sum\limits_{x=1}^{2003} f(n)=\dfrac{1}{2}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\dfrac{3}{2}$，则 $|2\vec{a}-\vec{b}|=$______．

14．若角 α 的终边经过点 $P(\sin 70^\circ,\cos 70^\circ)$，且 $\tan\alpha+\tan 2\alpha+m\tan\alpha\cdot\tan 2\alpha=\sqrt{3}$，则实数 $m=$______．

15．已知随机变量 ξ 服从正态分布 $N(4,\sigma^2)$，且 $P(\xi<6)=5P(\xi<2)$，则 $P(2<\xi<6)=$

______.

16. 折纸是我国民间的一种传统手工艺术，明德小学在课后延时服务中聘请了民间艺术传人给同学们教授折纸．课堂上，老师给每位同学发了一张长为10cm，宽为8cm的矩形纸片，要求大家将纸片沿一条直线折叠．若折痕（线段）将纸片分为面积比为1：3的两部分，则折痕长度的取值范围是______cm．

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17.（10分）已知集合 $A=\left\{x\middle|x=2n-1,n\in\mathbf{N}^*\right\}$，$B=\left\{x\middle|x=3^n,n\in\mathbf{N}^*\right\}$，将 A 与 B 中的所有元素按从小到大的顺序排列构成数列 $\{a_n\}$（若有相同元素，按重复方式计入排列）为1，3，3，5，7，9，9，11，….设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n．

（1）若 $a_m=27$，求 m 的值；

（2）求 S_{50} 的值．

18.（12分）某校所在省市高考采用新高考模式，学生按“3+1+2”模式选科参加高考：“3”为全国统一高考的语文、数学、外语3门必考科目；“1”由考生在物理、历史2门中选考1门科目；“2”由考生在思想政治、地理、化学、生物学4门中选考2门科目．

（1）为摸清该校本届考生的选科意愿，从本届750位学生中随机抽样调查了100位学生，得到如下部分数据分布：

	选物理方向	选历史方向	合计
男生	30		40
女生			
合计	50		100

请在答题卡的本题表格中填好上表中余下的5个空，并判断是否有99.9%的把握认为该校“学生选科的方向”与“学生的性别”有关；

（2）记已选物理方向的甲、乙两同学在“4选2”的选科中所选的相同的选科门数为 ξ，求 ξ 的分布列及数学期望．

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$．

$P(K^2\geq k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

19.（12分）在△ABC 中，设角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且满足 $(a+b)b=c^2$．

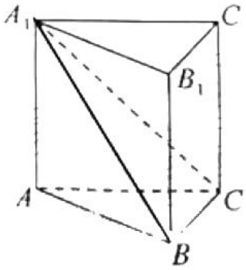
（1）求证：$C=2B$；

（2）求 $\dfrac{a+4b}{b\cos B}$ 的最小值．

20.（12分）如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，平面 $A_1BC\perp$ 侧面 A_1ABB_1．

（1）求证：$AB\perp BC$；

（2）若直线 AC 与平面 A_1BC 所成的角为 θ，二面角 A_1-BC-A 的大小为 φ，试判断 θ 与 φ 的大小关系，并予以证明．



21．（12 分）设 $f(x)=e^x\sin x$．

（1）求 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的极值；

（2）若对 $\forall x_1$，$x_2\in[0,\pi]$，$x_1\neq x_2$，都有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1^2-x_2^2}+a>0$ 成立，求实数 a 的取值范围．

22．（12 分）已知双曲线 $\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$，经过双曲线 Γ 上的点 $A(2,1)$ 作互相垂直的直线 AM、AN 分别交双曲线 Γ 于 M、N 两点．设线段 AM、AN 的中点分别为 B、C，直线 OB、OC（O 为坐标原点）的斜率都存在且它们的乘积为 $-\dfrac{1}{4}$．

（1）求双曲线 Γ 的方程；

（2）过点 A 作 $AD\perp MN$（D 为垂足），请问：是否存在定点 E，使得 $|DE|$ 为定值？若存在，求出点 E 的坐标；若不存在，请说明理由．

广州市 2023 届高三年级阶段测试
数学试题参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	D	B	A	D	C	B	B

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

9．BCD　　10．BC　　11．BD　　12．BCD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．$\sqrt{7}$　　14．$\sqrt{3}$　　15．$\dfrac{2}{3}$　　16．$\left[8,2\sqrt{29}\right]$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．

17．（10 分）（1）解：因为 $a_m=27$，所以数列 $\{a_n\}$ 中前 m 项中含有 A 中的元素为 1，3，5，7，9，…，27，共有 14 项，数列 $\{a_n\}$ 中前 m 项中含有 B 中的元素为 3，9，27，共有 3 项，

排列后为 1，3，5，7，9，9，…，27，27，29，…，所以 $m=16$ 或 17．

（2）因为 $2\times50-1=99$，$3^4=81<99$，$3^5=243>99$，所以数列 $\{a_n\}$ 中前 50 项中含有 B 中的元素为 3，9，27，81 共有 4 项，它们都是正奇数，均属于 A，

所以数列 $\{a_n\}$ 中前 50 项中含有 A 中的元素为 1，3，5，7，9，…，27，29，…，79，81，83，…，$2\times46-1=91$，共有 46 项，所以

$$S_{50}=\frac{46\times(1+91)}{2}+(3+9+27+81)=2116+120=2236.$$

18．（12 分）

（1）解：

	选物理方向	选历史方向	合计
男生	30	10	40
女生	20	40	60
合计	50	50	100

$$K^2=\frac{100\times(30\times40-20\times10)^2}{40\times60\times50\times50}=\frac{50}{3}\approx16.667>10.828$$

由于 $P\left(K^2\geq10.828\right)=0.001$，故而有 99.9%的把握认为该校“学生选科的方向”与“学生的性别”有关

（2）解：ξ 可能取值为 0，1，2，$P(\xi=0)=\dfrac{C_4^2\cdot C_2^2}{C_4^2\cdot C_4^2}=\dfrac{1}{6}$；$P(\xi=1)=\dfrac{C_4^1\cdot A_3^2}{C_4^2\cdot C_4^2}=\dfrac{2}{3}$；

（或 $P(\xi=1)=1-P(\xi=0)-P(\xi=2)=\dfrac{2}{3}$）　　$P(\xi=2)=\dfrac{C_4^2}{C_4^2\cdot C_4^2}=\dfrac{1}{6}$；

ξ 分布列如下表：

ξ	0	1	2

P	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

所以$E(\xi)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{6}=1$

19.（12分）(1)解：在$\triangle ABC$中，由已知及余弦定理，得$(a+b)b=c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，

即$b=a-2b\cos C$．由正弦定理，得$\sin B=\sin A-2\sin B\cos C$．又$A=\pi-(B+C)$，

故$\sin B=\sin(B+C)-2\sin B\cos C=\sin B\cos C+\cos B\sin C-2\sin B\cos C$

$=\cos B\sin C-\sin B\cos C=\sin(C-B)$．

$\because 0<\sin B=\sin(C-B)$，$\therefore 0<C-B<C<\pi$．$\because B+(C-B)=C<\pi$，$\therefore B=C-B$，

$C=2B$．

（2）解：由（1）$C=2B$得$B+C=3B\in(0,\pi)$，$\therefore B\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，$\cos B\in\left(\frac{1}{2},1\right)$．

由（1）$a=b(1+2\cos C)$，$C=2B$得

$$\frac{a+4b}{b\cos B}=\frac{5+2\cos C}{\cos B}=\frac{5+2\cos 2B}{\cos B}=\frac{5+2\left(2\cos^2 B-1\right)}{\cos B}$$

$$=4\cos B+\frac{3}{\cos B}\geq 2\sqrt{4\cos B\cdot\frac{3}{\cos B}}=4\sqrt{3}$$

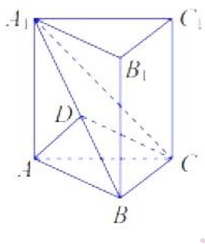
当且仅当$B=\frac{\pi}{6}\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$时等号成立．所以当$B=\frac{\pi}{6}$时，$\frac{a+4b}{b\cos B}$的最小值为$4\sqrt{3}$．

20.（12分）(1）证明：作$AD\perp A_1B$于D，连接CD，由平面$A_1BC\perp$平面A_1ABB_1，平面$A_1BC\cap$平面$A_1ABB_1=A_1B$，得$AD\perp$平面A_1BC．

又$BC\subset$平面A_1BC，所以$AD\perp BC$．因为三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$是直三棱柱，则$AA_1\perp$平面ABC．

所以$AA_1\perp BC$．又$AA_1\cap AD=A$，所以$BC\perp$平面A_1AAB_1，又$AB\subset$平面A_1ABB_1，

所以$AB\perp BC$．



(2)解1：由(1)知$\angle ACD$是直线AC与平面A_1BC所成的角，$\angle ABA_1$是二面角A_1-BC-A的平面角，

即$\angle ACD=\theta$，$\angle ABA_1=\varphi$．

在$Rt\triangle ADC$中，$\sin\theta=\frac{AD}{AC}$，在$Rt\triangle ADB$中，$\sin\varphi=\frac{AD}{AB}$，由于$AB<AC$，得

$\sin\theta<\sin\varphi$，

又$0<\theta$，$\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，所以$\theta<\varphi$．

解 2：由（1）知，以点B为坐标原点，以BC，BA，BB_1所在直线分别为x轴，y轴，z轴，建立如图所示的空间直角坐标系$B-xyz$，

设$AA_1=a$，$AC=b$，$AB=c$，则$B(0,0,0)$，$A(0,c,0)$，$C\left(\sqrt{b^2-c^2},0,0\right)$，$A_1(0,c,a)$，

于是$\overrightarrow{BC}=\left(\sqrt{b^2-c^2},0,0\right)$，$\overrightarrow{BA_1}=(0,c,a)$，$\overrightarrow{AC}=\left(\sqrt{b^2-c^2},-c,0\right)$，$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,a)$．

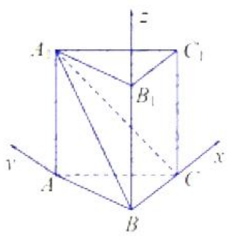
设平面A_1BC的一个法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，则由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BA_1}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}cy+az=0,\\ \sqrt{b^2-c^2}x=0,\end{cases}$

可取$\vec{n}=(0,-a,c)$，于是$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=ac>0$，$\overrightarrow{AC}$与$\vec{n}$的夹角$\beta$为锐角，则$\beta$与$\theta$互为余角．

$\sin\theta=\cos\beta=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\vec{n}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{ac}{b\sqrt{a^2+c^2}}$，$\cos\varphi=\dfrac{\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA_1}||\overrightarrow{BA}|}=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}$，

所以$\sin\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}$．于是由$c>b$，得$\dfrac{ac}{b\sqrt{a^2+c^2}}<\dfrac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}$．

即$\sin\theta<\sin\varphi$，又$0<\theta$，$\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，所以$\theta<\varphi$．



21．（12 分）（1）解：由$f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)\le 0$，$x\in[-\pi,\pi]$

得$f(x)$的单调减区间是$\left[-\pi,-\dfrac{\pi}{4}\right]$，$\left[\dfrac{3\pi}{4},\pi\right]$　　同理，$f(x)$的单调增区间是

$\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$

故$f(x)$的极小值为$f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2e^{\frac{\pi}{4}}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$，极大值为$f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{e}e^{\frac{3\pi}{4}}$

【注：若只用$f'(x)=0$得出结果至多给 3 分】

（2）解：由对称性，不妨设$0\le x_1<x_2\le\pi$，则$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1^2-x_2^2}+a>0$即为

$f(x_2)+ax_2^2>f(x_1)+ax_1^2$．设$g(x)=f(x)+ax^2$，则$g(x)$在$[0,\pi]$上单调递增，故

$g'(x)=e^x(\sin x+\cos x)+2ax\ge 0$在$[0,\pi]$上恒成立．

【方法一】（含参讨论）设$h(x)=g'(x)=e^x(\sin x+\cos x)+2ax\ge 0$，

则$h(0)=1>0$，$h(\pi)=-e^\pi+2a\pi\ge 0$，解得$a\ge\dfrac{e^\pi}{2\pi}$．

$h'(x)=2(e^x\cos x+a)$，$h'(0)=2(a+1)>0$，$h'(\pi)=2(a-e^\pi)$．

①当$a\ge e^\pi$时，$[h'(x)]'=2e^x(\cos x-\sin x)$，

故当$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$时，$[h'(x)]'=2e^x(\cos x-\sin x)\ge 0$，$h'(x)$递增；

当$x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\pi\right]$时，$[h'(x)]'=2e^x(\cos x-\sin x)\le 0$，$h'(x)$递减；

此时，$h'(x)\ge\min\{h'(0),h'(\pi)\}=h'(\pi)=2(a-e^\pi)\ge 0$，$h(x)=g'(x)$在$[0,\pi]$上单调递增，

故$h(x)=g'(x)\ge g'(0)=1>0$，符合条件．

②当$\dfrac{e^\pi}{2\pi}\le a<e^\pi$时，同①当$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$时，$h'(x)$递增；当$x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\pi\right]$时，$h'(x)$递减；

$\because h'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)>h'(0)=2(a+1)>0$，$h'(\pi)=2(a-e^\pi)<0$，

$\therefore$由连续函数零点存在性定理及单调性知，$\exists x_0\in\left(\dfrac{\pi}{4},\pi\right)$，$h'(x_0)=0$．

于是，当$x\in[0,x_0)$时，$h'(x)>0$，$h(x)=g'(x)$单调递增；

当$x\in(x_0,\pi]$时，$h'(x)<0$，$h(x)=g'(x)$单调递减．

$\because h(0)=1>0$，$h(\pi)=-e^\pi+2a\pi\ge 0$，

$\therefore g'(x)=h(x)\ge\min\{h(0),h(\pi)\}\ge 0$，符合条件．

综上，实数a的取值范围是$\left[\dfrac{e^\pi}{2\pi},+\infty\right)$．

【方法二】（必要性探路法）设$h(x)=g'(x)=e^x(\sin x+\cos x)+2ax\ge 0$，

则$h(0)=1>0$，$h(\pi)=-e^\pi+2a\pi\ge 0$，解得$a\ge\dfrac{e^\pi}{2\pi}$．

由于$a\ge\dfrac{e^\pi}{2\pi}$时，$g'(x)=e^x(\sin x+\cos x)+2ax\ge e^x(\sin x+\cos x)+\dfrac{e^\pi}{\pi}x$

故只需证：$e^x(\sin x+\cos x)+\dfrac{e^\pi}{\pi}x\ge 0$．

设$\varphi(x)=e^x(\sin x+\cos x)+\dfrac{e^\pi}{\pi}x$，$x\in[0,\pi]$，

则$\varphi'(x)=2e^x\cos x+\dfrac{e^\pi}{\pi}$，$x\in[0,\pi]$，$\varphi'(0)=2+\dfrac{e^\pi}{\pi}>0$，$\varphi'(\pi)=-2e^\pi+\dfrac{e^\pi}{\pi}<0$．

设 $m(x)=\varphi'(x)=2e^x\cos x+\dfrac{e^\pi}{\pi}$，$x\in[0,\pi]$，

则 $m'(x)=2e^x(\cos x-\sin x)$，$x\in[0,\pi]$．

当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 时，$m'(x)>0$，$m(x)$ 单调递增；

当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{4},\pi\right)$ 时，$m'(x)<0$，$m(x)$ 单调递减；

$\because m(0)=\varphi'(0)=2+\dfrac{e^\pi}{\pi}>0$，$m\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\varphi'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}+\dfrac{e^\pi}{\pi}>0$，

$m(\pi)=\varphi'(\pi)=-2\pi+\dfrac{e^\pi}{\pi}<0$

$\therefore \exists x_0\in\left(\dfrac{\pi}{4},\pi\right)$，$m(x_0)=\varphi'(x_0)=0$．

由 $m(x)$ 单调性知，当 $x\in(0,x_0)$ 时，$m(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调递增；

当 $x\in(x_0,\pi)$ 时，$m(x)<0$，$\varphi(x)$ 单调递减．$\because \varphi(0)=1>0$，$\varphi(\pi)=0$，$\therefore$

$\varphi(x)\ge\varphi(x)_{\min}=\varphi(\pi)=0$．

$e^x(\sin x+\cos x)+\dfrac{e^\pi}{\pi}x\ge0$，$\forall x\in[0,\pi]$，得证．

综上所述，实数 a 的取值范围是 $\left[\dfrac{e^\pi}{2\pi},+\infty\right)$．

【方法三】（参变分离）由对称性，不妨设 $0\le x_1<x_2\le\pi$，

则 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1^2-x_2^2}+a>0$ 即为 $f(x_2)+ax_2^2>f(x_1)+ax_1^2$．

设 $g(x)=f(x)+ax^2$，则 $g(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增，

故 $g'(x)=e^x(\sin x+\cos x)+2ax\ge0$ 在 $[0,\pi]$ 上恒成立．

$\because g'(0)=1>0$，$\therefore g'(x)=e^x(\sin x+\cos x)+2ax\ge0$ 在 $[0,\pi]$ 上恒成立，

得 $-2a\le\dfrac{e^x(\sin x+\cos x)}{x}$，$\forall x\in(0,\pi]$．

设 $h(x)=\dfrac{e^x(\sin x+\cos x)}{x}$，$x\in(0,\pi]$，

则 $h'(x)=\dfrac{e^x(2x\cos x-\sin x-\cos x)}{x^2}$，$x\in(0,\pi]$．

设 $\varphi(x)=2x-\tan x-1$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$，则 $\varphi'(x)=2-\dfrac{1}{\cos^2 x}$，

$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

由$\varphi'(x)>0$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$，得，$\varphi(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，$\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right]$上单调递增；

由$\varphi'(x)<0$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$，得，$\varphi(x)$在$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$上单调递减.

故$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时$\varphi(x)\le\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}-2<0$；$x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$时$\varphi(x)\ge\varphi\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{3\pi}{2}>0$.

从而，$\varphi(x)\cos x=2x\cos x-\sin x-\cos x<0$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$，

又$x=\frac{\pi}{2}$时，$2x\cos x-\sin x-\cos x=-1<0$，故$h'(x)=\frac{e^x(2x\cos x-\sin x-\cos x)}{x^2}<0$，$x\in(0,\pi]$，

$h(x)=\frac{e^x(\sin x+\cos x)}{x}$，$x\in(0,\pi]$单调递减，$h(x)_{\min}=h(\pi)=-\frac{e^\pi}{\pi}$，$x\in(0,\pi]$.

于是，$-2a\le-\frac{e^\pi}{\pi}\Leftrightarrow a\ge\frac{e^\pi}{2\pi}$．综上，实数$a$的取值范围是$\left[\frac{e^\pi}{2\pi},+\infty\right)$.

22.（12分）解：（1）设$M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$，线段AM、AN的中点分别为$B(m,n)$、$C(p,q)$，

由已知，得$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$；$\frac{2^2}{a^2}-\frac{1^2}{b^2}=1$，

两式相减，得$\frac{x_1^2-2^2}{a^2}-\frac{y_1^2-1^2}{b^2}=0$，即$\frac{y_1+1}{x_1+2}\cdot\frac{y_1-1}{x_1-2}=\frac{b^2}{a^2}$①

根据中点坐标及斜率公式，得

$x_1+2=2m$，$y_1+1=2n$，$k_{AM}=\frac{y_1-1}{x_1-2}$，$k_{OB}=\frac{n}{m}=\frac{y_1+1}{x_1+2}$，代入①，

得$k_{AM}\cdot k_{OB}=\frac{b^2}{a^2}$②　同理，得$k_{AN}\cdot k_{OC}=\frac{b^2}{a^2}$③，②③相乘，得$k_{AM}\cdot k_{AN}\cdot k_{OB}\cdot k_{OC}=\frac{b^4}{a^4}$.

$\because k_{OB}\cdot k_{OC}=-\frac{1}{4}$，$k_{AM}\cdot k_{AN}=-1$，$\therefore\frac{1}{4}=\frac{b^4}{a^4}$④

由$\frac{2^2}{a^2}-\frac{1^2}{b^2}=1$，与④联立，得$a^2=2$，$b^2=1$，

双曲线Γ的方程为：$\frac{x^2}{2}-y^2=1$.

（2）解：①当$MN\perp Ox$时，设$MN:x=t$，$M(t,y)$，$N(t,-y)$，$\overrightarrow{AM}=(t-2,y-1)$，$\overrightarrow{AN}=(t-2,-y-1)$由$AM$、$AN$互相垂直，得$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=(t-2)^2-(1-y^2)=0$，

由$\dfrac{t^2}{2}-y^2=1$解得$t=\dfrac{2}{3}$（此时y无实数解，故舍去），或$t=2$（此时M、N至少一个点与A重合，与条件不符，故舍去）．综上，此时无符合条件的解．

②当$MN\perp Ox$不成立时，设直线$MN:y=kx+m$，$M\left(x_1,y_1\right)$、$N\left(x_2,y_2\right)$，代入

$\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$得$\left(1-2k^2\right)x^2-4kmx-2\left(m^2+1\right)=0$，$1-2k^2\neq0$，

$\Delta=16k^2m^2-4\left(1-2k^2\right)(-2)\left(m^2+1\right)=8\left(m^2+1-2k^2\right)>0$　且$x_1+x_2=\dfrac{4km}{1-2k^2}$，

$x_1\cdot x_2=-\dfrac{2\left(m^2+1\right)}{1-2k^2}$，（*）

$\because\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=\left(x_1-2\right)\cdot\left(x_2-2\right)+\left(y_1-1\right)\cdot\left(y_2-1\right)$

$=\left(k^2+1\right)x_1\cdot x_2+\left[k(m-1)-2\right]\left(x_1+x_2\right)+(m-1)^2+4=0$

$\therefore$（*）代入，得$12k^2+8km+\left(m^2+2m-3\right)=0$即$(6k+m+3)(2k+m-1)=0$，

$m=-6k-3$或$m=-2k+1$．

当$m=-2k+1$时，$MN:y=kx+m=k(x-2)+1$过点$A(2,1)$，与条件不符，舍去．

$\therefore m=-6k-3$，$MN:y=kx+m=k(x-6)-3$，过定点$P(6,-3)$，

$\therefore AP$中点$E(4,-1)$，由于$AD\perp MN$（D为垂足），故$|DE|=\dfrac{1}{2}|AP|=2\sqrt{2}$．

综上所述，存在定点$E(4,-1)$，使得$|DE|$为定值$2\sqrt{2}$．

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。