# 2022学年第二学期9+1高中联盟期中考试

## 高二数学参考答案

**一、选择题**：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | C | D | A | B | A | C | D | B |

**二、选择题**：本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

| 题号 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|
| 答案 | ABC | AD | BC | ABD |

**三、填空题**：本小题共4小题，每小题5分，共20分.

13. $-2$　　14. $2^n-1$　　15. 13　　16. $(0,2e]$

**四、解答题**：本题共6小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 解：

（1）令$n=1$，可求$a_1=1$，由$2S_n=a_n{}^2+a_n$得$2S_{n-1}=a_{n-1}{}^2+a_{n-1}$，

可知$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-1)=0$，从而$a_n-a_{n-1}=1$，

则$\{a_n\}$是首项为1，公差为1的等差数列，

所以$a_n=n$　　……………5分

（2）由错位相减法可知$S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\cdots+\dfrac{n}{2^n}$，$\dfrac{1}{2}S_n=\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{2}{2^3}+\cdots+\dfrac{n}{2^{n+1}}$，

可知$S_n=2-\dfrac{n+2}{2^n}$，从而$S_n<2$　　…………10分

18. 解：

（1）函数的定义域为$(0,+\infty)$，又$f'(x)=\dfrac{(a\sqrt{x}-2)(a\sqrt{x}+1)}{x}$，

当$a>0$时，$f(x)$的减区间为$\left(0,\dfrac{4}{a^2}\right)$，增区间为$\left(\dfrac{4}{a^2},+\infty\right)$；

当$a<0$时，$f(x)$的减区间为$\left(0,\dfrac{1}{a^2}\right)$，增区间为$\left(\dfrac{1}{a^2},+\infty\right)$.　　……………………6分

（2）由$y=f(x)$的图象与$x$轴没有公共点，由（1）中函数的单调性可得，

当$a>0$时，$f(x)_{\min}=f\left(\dfrac{4}{a^2}\right)=1-2\ln\dfrac{4}{a^2}>0$，即$a>2e^{-\frac{1}{4}}$.

当$a<0$时，$f(x)_{\min}=f\left(\dfrac{1}{a^2}\right)=2(2+\ln a^2)>0$，即$a<-\dfrac{1}{e}$，

综上：$a>2e^{-\frac{1}{4}}$或$a<-\dfrac{1}{e}$.　　……………………12分

所以 $f'_1(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{4x}{3}=-\dfrac{(2x+3)(2x-1)}{3(x+1)}$，

当 $0<x<\dfrac{1}{2}$ 时，$f'_1(x)>0$，$f_1(x)$ 单调递增；当 $\dfrac{1}{2}<x<1$ 时，$f'_1(x)<0$，$f_1(x)$ 单调递减.

所以当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，$f_1(x)$ 取得最大值 $\ln\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{6}<\dfrac{1}{4}$，则 $\theta$ 不可以估计.

在团队 $B$ 提出的函数模型 $p=\dfrac{1}{2}(1-e^{-\theta})$ 中，记函数 $f_2(x)=\dfrac{1}{2}(1-e^{-x})$，$f_2(x)$ 单调递增，

令 $f_2(x)=\dfrac{1}{4}$，解得 $x=\ln 2$，则 $\theta=\ln 2$ 是 $\theta$ 的最大似然估计. ……………………12 分

22. 解：

（1）易知 $f'(x)=x\left(e^x-ax-2a\right)$，则 $e^x-ax-2a=0$ 一个根为 $x=0$，

即 $a=\dfrac{1}{2}$，经检验，$x=0$ 不是极值点； ……………………4 分

（2）当 $a<\dfrac{1}{2}$，令 $g(x)=\dfrac{e^x}{x+2}$，则 $g(x)=a$ 有两个非零交点，可知 $a\in\left(\dfrac{1}{e},\dfrac{1}{2}\right)$，

且 $-2<x_1<-1<x_2<0$，$x_3=0$，同时满足 $e^{x_1}=a(x_1+2)$，$e^{x_2}=a(x_2+2)$，

即 $e^{x_2-x_1}=\dfrac{x_2+2}{x_1+2}$，令 $\dfrac{x_2+2}{x_1+2}=t(t>1)$，即 $x_2-x_1=(t-1)(x_1+2)=\ln t$，

从而 $x_1=\dfrac{\ln t}{t-1}-2$，$x_1+x_2=(t+1)x_1+2t-2=\dfrac{t+1}{t-1}\ln t-4$，

由 $x_1+x_2+x_3\in\left[3\ln 2-4,\dfrac{5-3e}{e-1}\right]$ 可知，$\dfrac{t+1}{t-1}\ln t\in\left[3\ln 2,\dfrac{e+1}{e-1}\right]$，

令 $h(t)=\dfrac{t+1}{t-1}\ln t$，可知 $h(t)=\dfrac{t-\frac{1}{t}-2\ln t}{(t-1)^2}$，易知 $t-\dfrac{1}{t}-2\ln t>0$，

即 $h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，且 $h(2)=3\ln 2$，$h(e)=\dfrac{e+1}{e-1}$，

故 $t\in[2,e]$. ……………………12 分

19. 解：

（1）设 $A_i=$“第$i$天去$A$餐厅用餐”，$B_i=$“第$i$天去$B$餐厅用餐”，其中 $i=1,2$，

则 $\Omega=A_1\cup B_1$，由题知 $P(A_1)=P(B_1)=0.5$，$P(A_2\mid A_1)=0.6$，$P(A_2\mid B_1)=0.8$，

由全概率公式可知

$P(A_2)=P(A_2\mid A_1)P(A_1)+P(A_2\mid B_1)P(B_1)=0.7$ ……………………5 分

（2）由超几何分布知 $P(X=1)=\dfrac{C_5^1C_n^2}{C_{n+5}^3}=\dfrac{15n(n-1)}{(n+5)(n+4)(n+3)}$，

令 $a_n=\dfrac{15n(n-1)}{(n+5)(n+4)(n+3)}$，若 $a_{n+1}\ge a_n$，可得 $(n+1)(n+3)\ge(n+6)(n-1)$，

即 $n\le 9$，所以当 $n=9$ 或 $10$ 时 $P(X=1)$ 最大为 $\dfrac{45}{91}$. ……………………12 分

20. 解：

（1）易知 $f(x)+f(1-x)=2$，故 $a_n=2n-1$ ……………………5 分

（2）易知 $S_n=n^2$，$\dfrac{S_n}{a_na_{n+1}}=\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$，

可知 $T_n=\dfrac{n}{4}+\dfrac{1}{8}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{n(n+1)}{4n+2}$，故 $\lambda\ge\dfrac{n+1}{n(4n+2)}$，令 $g(n)=\dfrac{n+1}{n(4n+2)}$，

则 $g(n)=\dfrac{1}{4(n+1)+\dfrac{2}{n+1}-6}$，易知 $g(n)_{\max}=g(1)=\dfrac{1}{3}$，故 $\lambda\ge\dfrac{1}{3}$. ……………………12 分

21. 解：

（1）由题知，随机变量 $X$ 服从二项分布，$X\sim B\left(n,\ \dfrac{1}{2}\right)$，

由 $P(X=5)=P(X=95)$，得 $n=100$，$E(X)=50$. ……………………4 分

（2）①设事件 A 为“X1＝x1，X2＝x2，…，X10＝x10”，

$P(A)=[C_{10}^1p(1-p)^9]^3\cdot[C_{10}^2p^2(1-p)^8]^3\cdot[C_{10}^3p^3(1-p)^7]^2\cdot[C_{10}^4p^4(1-p)^6][C_{10}^6p^6(1-p)^4]$，

$P(A)=(C_{10}^1)^3(C_{10}^2)^3(C_{10}^3)^2(C_{10}^4)^2p^{25}(1-p)^{75}$.

②记 $g(p)=\ln[(C_{10}^1)^3(C_{10}^2)^3(C_{10}^3)^2(C_{10}^4)^2]+25\ln p+75\ln(1-p)$，

则 $g'(p)=\dfrac{25}{p}-\dfrac{75}{1-p}=\dfrac{25-100p}{p(1-p)}$，

当 $0<p<\dfrac{1}{4}$ 时，$g'(p)>0$，$g(p)$ 单调递增；当 $\dfrac{1}{4}<p<1$ 时，$g'(p)<0$，$g(p)$ 单调递减.

当 $p=\dfrac{1}{4}$ 时，$g(p)$ 取得最大值，即 $P(A)$ 取得最大值.

在团队 $A$ 提出的函数模型 $p=\ln(1+\theta)-\dfrac{2}{3}\theta^2$ 中，记函数 $f_1(x)=\ln(1+x)-\dfrac{2}{3}x^2$，