秘密★启用前　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　试卷类型：B

2023年广州市普通高中毕业班综合测试（二）

数　学

本试卷共5页，22小题，满分150分。考试用时120分钟。

注意事项：1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。用2B铅笔在答题卡的相应位置填涂考生号。

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内的相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 若a为实数，且$\dfrac{7+ai}{3+i}=2-i$，则$a=$

A. 2　　B. 1　　C. -1　　D. -2

2. 已知集合$A=\{x\mid x=3n-2,n\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\{6,7,10,11\}$，则集合$A\cap B$的元素个数为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

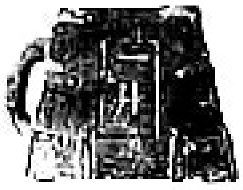
3. 已知两个非零向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}|=3|\boldsymbol{b}|$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，则$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=$

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $-\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D. $-\dfrac{1}{3}$

4. 已知$a=3^{\frac{2}{3}}$，$b=2^{\frac{3}{4}}$，$c=4^{\frac{1}{3}}$，则

A. $c<a<b$　　B. $b<c<a$　　C. $b<a<c$　　D. $c<b<a$

5. 木升在古代多用来盛装粮食作物，是农家必备的用具，如图为一升制木升．某同学制作了一个高为40cm的正四棱台木升模型，已知该正四棱台的所有顶点都在一个半径为50cm的球O的球面上，且一个底面的中心与球O的球心重合，则该正四棱台的侧面与底面所成二面角的正弦值为



A. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　D. $\dfrac{2}{5}$

6. 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，过点$(-a,0)$且方向向量为$\boldsymbol{n}=(1,-1)$的光线，经直线$y=-b$反射后过$C$的右焦点，则$C$的离心率为

A. $\dfrac{3}{5}$　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. $\dfrac{3}{4}$　　D. $\dfrac{4}{5}$

7. 已知函数$f(x)=\sin(2x+\varphi)$，若$f(x)\leqslant\left|f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right|$恒成立，且$f(\pi)>f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，则$f(x)$的单调递增区间为

A. $\left[k\pi+\dfrac{\pi}{6},\ k\pi+\dfrac{2\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$　　B. $\left[k\pi-\dfrac{\pi}{6},\ k\pi+\dfrac{\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$

C. $\left[k\pi-\dfrac{\pi}{3},\ k\pi+\dfrac{\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$　　D. $\left[k\pi-\dfrac{2\pi}{3},\ k\pi-\dfrac{\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$

8. 已知偶函数$f(x)$与其导函数$f'(x)$的定义域均为$\mathbf{R}$，且$f'(x)+e^{-x}+x$也是偶函数，若$f(2a-1)<f(a+1)$，则实数a的取值范围是

A. $(-\infty,\ 2)$　　B. $(0,\ 2)$　　C. $(2,\ +\infty)$　　D. $(-\infty,0)\cup(2,\ +\infty)$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．

9. 有3台车床加工同一型号的零件，第1台加工的次品率为8%，第2台加工的次品率为3%，第3台加工的次品率为2%，加工出来的零件混放在一起．已知第1，2，3台车床加工的零件数分别占总数的10%，40%，50%，从混放的零件中任取一个零件，则下列结论正确的是

A. 该零件是第1台车床加工出来的次品的概率为0.08

B. 该零件是次品的概率为0.03

C. 如果该零件是第3台车床加工出来的，那么它不是次品的概率为0.98

D. 如果该零件是次品，那么它不是第3台车床加工出来的概率为$\dfrac{1}{3}$

10. 已知函数$f(x)=1-\dfrac{4|x|}{x^2+4}$的定义域是$[a,b]$ $(a,b\in\mathbf{Z})$，值域为$[0,1]$，则满足条件的整数对(a,b)可以是

A. $(-2,0)$　　B. $(-1,1)$　　C. $(0,2)$　　D. $(-1,2)$

11．已知双曲线$\Gamma: x^2-y^2=a^2$（$a>0$）的左，右焦点分别为F_1，F_2，过F_2的直线l与双曲线Γ的右支交于点B，C，与双曲线Γ的渐近线交于点A，D（A，B在第一象限，C，D在第四象限），O为坐标原点，则下列结论正确的是

A．若$BC\perp x$轴，则$\triangle BCF_1$的周长为$6a$

B．若直线OB交双曲线Γ的左支于点E，则$BC\parallel EF_1$

C．$\triangle AOD$面积的最小值为$4a^2$

D．$|AB|+|BF_1|$的取值范围为$(3a,+\infty)$

12．已知正四面体$A-BCD$的棱长为2，点M，N分别为$\triangle ABC$和$\triangle ABD$的重心，P为线段CN上一点，则下列结论正确的是

A. 若$AP+BP$取得最小值，则$CP=PN$

B. 若$CP=3PN$，则$DP\perp$平面ABC

C. 若$DP\perp$平面ABC，则三棱锥$P-ABC$外接球的表面积为$\dfrac{27\pi}{2}$

D. 直线MN到平面ACD的距离为$\dfrac{2\sqrt{6}}{9}$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13．某班有48名学生，一次考试的数学成绩X（单位：分）服从正态分布$N(80,\sigma^2)$，且成绩在$[80,90]$上的学生人数为16，则成绩在90分以上的学生人数为________．

14．已知$n\in\mathbf{N}^*$，$\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)^n$的展开式中存在常数项，写出$n$的一个值为________．

15．在数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_{m+n}=a_m+a_n$，若$a_ka_{k+1}=440$，则正整数$k=$________．

16．在平面直角坐标系xOy中，定义$d(A,B)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$为$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$两点之间的“折线距离”．已知点$Q(1,0)$，动点$P$满足$d(Q,P)=\dfrac{1}{2}$，点$M$是曲线$y=\dfrac{1}{x^2}$上任意一点，则点$P$的轨迹所围成图形的面积为________，$d(P,M)$的最小值为________．（第一个空2分，第二个空3分）

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10 分）

设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_3=0$，$a_{n+1}+(-1)^n S_n=2^n$．

（1）求 a_1，a_2；

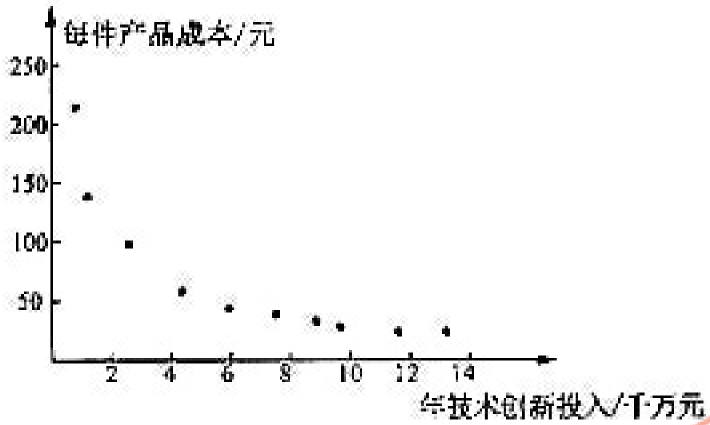
（2）令 $b_n=a_{n+1}+2a_n$，求 $b_2+b_4+b_6+\cdots+b_{2n}$．

18．（12 分）

一企业生产某种产品，通过加大技术创新投入降低了每件产品成本．为了调查年技术创新投入 x（单位：千万元）对每件产品成本 y（单位：元）的影响，对近 10 年的年技术创新投入 x_i 和每件产品成本 y_i（$i=1,2,3,\cdots,10$）的数据进行分析，得到如下散点图，并计算得：

$$\bar{x}=6.8，\quad \bar{y}=70，\quad \sum_{i=1}^{10}\frac{1}{x_i}=3，\quad \sum_{i=1}^{10}\frac{1}{x_i^2}=1.6，\quad \sum_{i=1}^{10}\frac{y_i}{x_i}=350．$$

（1）根据散点图可知，可用函数模型 $y=\dfrac{b}{x}+a$ 拟合 y 与 x 的关系，试建立 y 关于 x 的回归方程；



（2）已知该产品的年销售额 m（单位：千万元）与每件产品成本 y 的关系为 $m=-\dfrac{y^2}{500}+\dfrac{2y}{25}+\dfrac{200}{y-10}+100$．该企业的年投入成本除了年技术创新投入，还要投入其他成本 10 千万元，根据（1）的结果回答：当年技术创新投入 x 为何值时，年利润的预报值最大？

（注：年利润＝年销售额－年投入成本）

参考公式：对于一组数据 $(u_1,v_1),(u_2,v_2),\cdots,(u_n,v_n)$，其回归直线 $v=\alpha+\beta u$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为：$\hat{\beta}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}u_iv_i-n\bar{u}\bar{v}}{\sum\limits_{i=1}^{n}u_i^2-n\bar{u}^2}$，$\hat{\alpha}=\bar{v}-\hat{\beta}\bar{u}$．

19. （12 分）

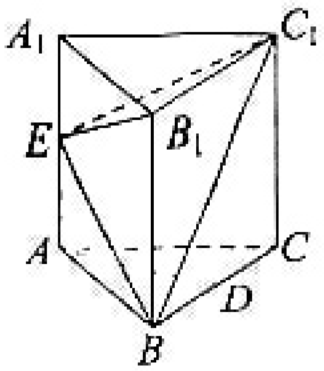
记△ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$b\cos A-a\cos B=b-c$．

（1）求A；

（2）若点D在BC边上，且$CD=2BD$，$\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，求$\tan\angle BAD$．

20.（12 分）

如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB=AC=AA_1=3$，点D是BC的中点，点E在AA_1上，AD∥平面BC_1E．



（1）求证：平面BC_1E⊥平面BB_1C_1C；

（2）当三棱锥B_1-BC_1E的体积最大时，求直线AC与平面BC_1E所成角的正弦值．

21.（12 分）

已知点$F(1,0)$，P为平面内一动点，以PF为直径的圆与y轴相切，点P的轨迹记为C．

（1）求C的方程；

（2）过点F的直线l与C交于A，B两点，过点A且垂直于l的直线交x轴于点M，过点B且垂直于l的直线交x轴于点N．当四边形$MANB$的面积最小时，求l的方程．

22.（12 分）

已知函数$f(x)=\ln(1+x)$，$g(x)=ax^2+x$．

（1）当$x>-1$时，$f(x)\leqslant g(x)$，求实数a的取值范围；

（2）已知$n\in\mathbf{N}^*$，证明：$\sin\dfrac{1}{n+1}+\sin\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\sin\dfrac{1}{2n}<\ln 2$．