2023 年普通高等学校招生全国统一考试考前演练四

数学参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	A	C	C	A	C	B	D

1. D 【解析】由 $B=\{x|x^2-4x-5\leqslant 0\}=[-1,5]$，又 $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，所以 $A\cap B=\{1,2,3,4,5\}$，所以集合 $A\cap B$ 的子集共有 $2^5=32$ 个. 故选 D.

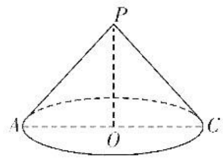
2. A 【解析】因为 $\frac{z}{1+i}+1-2i=\frac{a+1}{2}-\frac{a+5}{2}i$ 为实数，所以 $a+5=0$，即 $a=-5$. 故选 A.

3. C 【解析】圆的标准方程为 $(x-a)^2+(y-3)^2=4$，圆心为 $C(a,3)$，半径 $R=2$，

设直线和圆相交于 A,B 两点，由较短弧长与较长弧长之比为 $1:3$，则 $\angle ACB=\frac{\pi}{2}$，故 $|AB|=2\sqrt{2}$，

则圆心到直线 $x-y+2=0$ 的距离 $d=\sqrt{2}$，即 $d=\frac{a-1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，解得 $a=-1$ 或 3，故选 C.

4. C 【解析】如图，因为轴截面的顶角 $\angle APC=120°$，所以底角 $\angle PAO=30°$，



在 $\mathrm{Rt}\triangle APO$ 中，该圆形攒尖的底面圆半径 $r=AO=2$，母线长 $l=PA=\frac{AO}{\cos 30°}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

则侧面积 $S=\pi rl=\pi\times 2\times\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi\approx 14.5(\mathrm{m}^2)$，所以该屋顶的侧面积约为 $14.5\ \mathrm{m}^2$.

故选 C.

5. A 【解析】因为 $\overrightarrow{BP}\perp\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，因为 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BA}+(1-\lambda)\overrightarrow{BC}$，

所以 $[\lambda\overrightarrow{BA}+(1-\lambda)\overrightarrow{BC}]\cdot\overrightarrow{AC}=0$，即 $[-\lambda\overrightarrow{AB}+(1-\lambda)(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})]\cdot\overrightarrow{AC}=0$，

所以 $(1-\lambda)\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，因为 $\angle A=60°$，$AB=6$，$AC=4$，

所以 $16(1-\lambda)-6\times 4\times\frac{1}{2}=0$，解得 $\lambda=\frac{1}{4}$，故选 A.

6. C 【解析】先建立 v 关于 x 的经验回归方程，由 $y=e^{\lambda x+t}$，得 $v=\ln y=t+\lambda x$，即 $v=t+\lambda x$，

$$\text{由 }\lambda=\frac{\sum_{i=1}^{12}(x_i-\bar{x})(v_i-\bar{v})}{\sum_{i=1}^{12}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{2}{11}\approx 0.18,\ t=\bar{v}-\lambda\bar{x}=4.20-\frac{2}{11}\times 20\approx 0.56,$$

所以 v 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{v}=0.18x+0.56$，所以 $\ln\hat{y}=0.18x+0.56$，则 $\hat{y}=e^{0.18x-0.56}$.

下一年销售额 y 需达到 90 亿元，即 $y=90$，代入 $\hat{y}=e^{0.18x+0.56}$，得 $90=e^{0.18x+0.56}$，

又 $e^{4.5}\approx 90$，所以 $4.5\approx 0.18x+0.56$，所以 $x\approx\frac{4.5-0.56}{0.18}\approx 21.89$，

所以预测下一年的研发资金投入量约是 21.89 亿元. 故选 C.

7. B 【解析】$(x+y)^6$ 展开式的通项为 $T_{k+1}=C_6^k x^{6-k}y^k(k=0,1,2\cdots,6)$，

由于 $\left(1-\frac{y}{x}\right)(x+y)^6=(x+y)^6-\frac{y}{x}(x+y)^6$，当 $k=4$ 时，$T_5=C_6^4x^2y^4$，当 $k=3$ 时，$T_4=C_6^3x^3y^3$，

所以 $\left(1-\frac{y}{x}\right)(x+y)^6$ 的展开式中 x^2y^4 的项为 $C_6^4x^2y^4-\frac{y}{x}C_6^3x^3y^3=(C_6^4-C_6^3)x^2y^4=(15-20)x^2y^4=-5x^2y^4$，

所以$\left(1-\frac{y}{x}\right)(x+y)^6$ 的展开式中 x^2y^4 的系数为-5. 故选 B.

8. D 【解析】由已知抛物线焦点 $F(1,0)$，准线为 $x=-1$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 AB:$x=my+1$，

联立$\begin{cases}y^2=4x,\\x=my+1\end{cases}\Rightarrow y^2-4my-4=0$，$\therefore y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$，

$\therefore |AB|=\sqrt{1+m^2}\sqrt{(4m)^2-4\times(-4)}=4(1+m^2)$，线段 AB 的中点为 $M(2m^2+1,2m)$，

则准线上的一点 $P(-1,t)$ 满足 $\frac{t-2m}{-1-1-2m^2}\cdot\frac{1}{m}=-1$，$\therefore t-2m=2m(1+m^2)$，

$\because |PM|=\frac{\sqrt{3}}{2}|AB|$，$\therefore (2m^2+2)^2+4m^2(1+m^2)^2=\frac{3}{4}\cdot 16(1+m^2)^2$，$\therefore m^2=2$，

$\therefore |AB|=12$，$\triangle PAB$ 的周长为 $3\times12=36$，故选 D.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

题 号	9	10	11	12
答 案	ABD	AD	BD	ABC

9. ABD 【解析】因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，即 $f(x)+f(-x)=0$，

所以$\frac{2}{e^x+1}-a+\frac{2}{e^{-x}+1}-a=\frac{2(1+e^x)}{e^x+1}-2a=2-2a=0$，解得 $a=1$，故选项 A 正确；

因为函数 $f(x)=\frac{2}{e^x+1}-1=\frac{1-e^x}{1+e^x}$是奇函数，其图象关于$(0,0)$点对称，

所以函数 $y=|f(x)|$ 的图象关于 y 轴对称，故选项 B 正确；

设 $x_1<x_2$，则 $f(x_2)-f(x_1)=\frac{2}{e^{x_2}+1}-1-\frac{2}{e^{x_1}+1}+1=\frac{2(e^{x_1}+1)-2(e^{x_2}+1)}{(e^{x_2}+1)(e^{x_1}+1)}=\frac{2(e^{x_1}-e^{x_2})}{(e^{x_2}+1)(e^{x_1}+1)}$，

因为 $y=e^x$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数，所以 $e^{x_1}<e^{x_2}$，又 $e^{x_2}+1>0$，$e^{x_1}+1>0$，

所以 $f(x_2)-f(x_1)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，故选项 C 错误；

由 $f(t-2)+f(t^2)>0$ 得 $f(t^2)>-f(t-2)=f(2-t)$，

由于 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，所以 $t^2<2-t$，解得$-2<t<1$，故选项 D 正确. 故选 ABD.

10. AD 【解析】由图象可知，$f(x)$ 的最小值为-1，又 $A>0$，所以 $A=1$，

因为$\frac{T}{4}=\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}$，所以 $T=\pi$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$，从而 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$，

将$\left(\frac{7\pi}{12},-1\right)$代入 $f(x)$，得 $\sin\left(\frac{7\pi}{6}+\varphi\right)=-1$，故$\frac{7\pi}{6}+\varphi=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，故选项 A 正确；

由于 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，又 $f\left(-\frac{5\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{10\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=\sin(-3\pi)=0$，故选项 B 错误；

当$\frac{7\pi}{12}<x<\pi$ 时，$\frac{3\pi}{2}<2x+\frac{\pi}{3}<2\pi+\frac{\pi}{3}$，函数 $f(x)$在区间$\left(\frac{7\pi}{12},\pi\right)$上单调递增，故选项 C 错误；

将 $f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度得到 $y=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2x$，故选项 D 正确.

故选 AD.

11. BD 【解析】由 $b\sin\frac{B+C}{2}=a\sin B$ 及正弦定理得 $\sin B\sin\frac{B+C}{2}=\sin A\sin B$，而 $\sin B\neq0$ 且$\frac{B+C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$，

所以 $\cos\frac{A}{2}=\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$，$0<\frac{A}{2}<\frac{\pi}{2}$，则 $\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$，故 A 错误；

因为 $b\cos C+c\cos B=\sqrt{3}$ 及余弦定理得 $b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+c\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\sqrt{3}$，则 $a=\sqrt{3}$，故 B 正确；

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\geqslant 2bc-bc=bc$，又 $a=\sqrt{3}$，所以 $bc\leqslant 3$，所以$\triangle ABC$ 面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A$

$\leqslant\frac{1}{2}\times 3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，当且仅当 $b=c$ 时等号成立，此时$\triangle ABC$ 面积最大，故 C 错误；

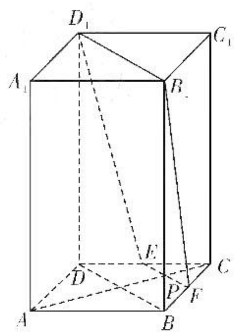
由正弦定理知 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$，所以 $b=2\sin B$，$c=2\sin C$，

因为 $A=\frac{\pi}{3}$，所以 $B+C=\pi-A=\frac{2\pi}{3}$，从而 $C=\frac{2\pi}{3}-B$，

则 $b+c=2(\sin B+\sin C)=2\left[\sin B+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)\right]=2\left(\frac{3}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B\right)=2\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)$，

因为$\triangle ABC$ 为锐角三角形且 $A=\frac{\pi}{3}$，所以 $\begin{cases}B+C=\frac{2\pi}{3},\\0<B<\frac{\pi}{2},\\0<C<\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 解得 $\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$，则 $B+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$，$\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$，从而 $3<b+c=2\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 2\sqrt{3}$，故 $b+c$ 的取值范围为 $(3,2\sqrt{3}]$. 故 D 正确. 故选 BD.

12. ABC 【解析】因为在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AC/\!/A_1C_1$，$C_1B/\!/AD_1$，所以平面 $ACD_1/\!/$平面 A_1C_1B，又 $PD_1\subset$平面 ACD_1，所以 $PD_1/\!/$平面 A_1C_1B，故 A 正确；



因为四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为直四棱柱，所以 $AC/\!/A_1C_1$，因为 $AC\not\subset$平面 A_1C_1D，$A_1C_1\subset$平面 A_1C_1D，所以 $AC/\!/$平面 A_1C_1D，所以点 P 到平面 A_1C_1D 的距离恒为定值，因为$\triangle A_1C_1D$ 的面积为定值，所以四面体 A_1C_1DP 的体积为定值，故 B 正确；

设直线 BP 与平面 A_1BC_1 所成的角为 θ，$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，因为点 P 到平面 A_1BC_1 的距离为定值 $\frac{4\sqrt{21}}{7}$，所以当 BP 最小，即 P 为 AC 的中点时，直线 BP 与平面 A_1BC_1 所成的角的正弦值最大，此时 $BP=2\sqrt{2}$，所以 $\sin\theta=\frac{\sqrt{42}}{7}$，故 C 正确；

当 $AP=\frac{3}{4}AC$ 时，点 P 为 AC 上靠近点 C 的四等分点，过点 P 作 $EF/\!/BD$，分别交 CD，CB 于点 E，F，则平面 PB_1D_1 截四棱柱所得较小部分的几何体为棱台 $FCE-B_1C_1D_1$，如图，易知 $CE=CF=\frac{1}{2}CD=2$，

所以该棱台的体积为 $V=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times 2^2+\frac{1}{2}\times 4^2+\sqrt{\frac{1}{2}\times 2^2\times\frac{1}{2}\times 4^2}\right)\times 4\sqrt{3}=\frac{56\sqrt{3}}{3}$，故 D 错误. 故选 ABC.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\sqrt{3}$ 【解析】设 $|AF_2|=t$，则 $|AF_1|=2t$，$|F_1F_2|=\sqrt{3}t$，离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{|F_1F_2|}{|AF_1|-|AF_2|}=\frac{\sqrt{3}t}{2t-t}=\sqrt{3}$.

14. $b\lg a>a\lg b$ 【解析】令 $f(x)=x+2^x$，$g(x)=x+3^x$，则当 $x>0$ 时，$g(x)>f(x)$，

由 $a+2^a=b+3^b=2$，得 $0<b<a<1$，$\therefore a^b>b^b>b^a$，由 $a^b>b^a$，得 $b\lg a>a\lg b$.

15. $\frac{\pi}{2}$ 【解析】因为 $3\sin 2\alpha-2\sin 2\beta=0$，所以 $2\sin 2\beta=3\sin 2\alpha=6\sin\alpha\cos\alpha$，

由 $3\sin^2\alpha-\cos 2\beta=0$ 及 α,β 都是锐角得 $\cos 2\beta=3\sin^2\alpha>0$，则 $0<2\beta<\frac{\pi}{2}$，

所以$\frac{\sin 2\beta}{\cos 2\beta}=\frac{3\sin\alpha\cos\alpha}{3\sin^2\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$，所以$\cos\alpha\cos 2\beta-\sin\alpha\sin 2\beta=\cos(\alpha+2\beta)=0$，

因为α,β都是锐角，则$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$且$0<2\beta<\frac{\pi}{2}$，

所以$0<\alpha+2\beta<\pi$，因此$\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$.

16. $(e+1,+\infty)$ 【解析】$f(x)=e^x-ax+\ln x-e+a(x\geqslant1)$，$f(1)=0$，$f'(x)=e^x-a+\frac{1}{x}$，

设$h(x)=e^x-a+\frac{1}{x}$，$h'(x)=\frac{x^2\cdot e^x-1}{x^2}$，由$x\geqslant1$得，$x^2\geqslant1$，$x^2e^x-1>0$，

$\therefore h'(x)>0$，$h(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，即$f'(x)$单调递增，$f'(1)=e+1-a$，

①当$e+1-a\geqslant0$，即$a\leqslant e+1$时，$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，

又$f(1)=0$，此时函数$y=f(x)$在$[1,+\infty)$上有且只有一个零点；

②当$e+1-a<0$，即$a>e+1$时，令$m(x)=e^x-ex$，$m'(x)=e^x-e$，

当$x\geqslant1$时，$m'(x)\geqslant0$，$m(x)\geqslant m(1)=0$，故$e^x\geqslant ex$，

$\therefore f'(x)=e^x+\frac{1}{x}-a\geqslant ex+\frac{1}{x}-a$，则$f'\left(\frac{a}{e}\right)\geqslant e\cdot\frac{a}{e}+\frac{e}{a}-a=\frac{e}{a}>0$，

又$\frac{a}{e}>1$，故$\exists x_0\in\left(1,\frac{a}{e}\right)$，使得$f'(x_0)=0$，当$x\in(1,x_0)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，故$f(x)<f(1)=0$，

$\therefore$函数$y=f(x)$在$[1,x_0)$内有一个零点，

当$x\in(x_0,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，且$f(a)=e^a+\ln a-a^2+a-e>e^a-a^2+1$，

令$k(x)=e^x-x^2+1(x\geqslant1)$，$s(x)=k'(x)=e^x-2x$，$s'(x)=e^x-2\geqslant e-2>0$，

故$k'(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，则$k'(x)>k'(1)>0$，$\therefore x>1$时，$k(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，

故$k(a)>k(1)>0$，即$f(a)>0$，又$a>\frac{a}{e}>x_0$，由零点存在定理可知，$\exists x_1\in(x_0,a)$，使得$f(x_1)=0$，

所以当$a>e+1$时，函数$y=f(x)$在$[1,+\infty)$内有两个不同零点.

综上，若函数$y=f(x)$在$[1,+\infty)$上有两个不同的零点，则实数a的取值范围是$(e+1,+\infty)$.

四、解答题：本题共6小题，共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 【解析】(1)当$n\geqslant2$时，$(S_{n+1}-S_n)-(S_n-S_{n-1})=2$，故$a_{n-1}-a_n=2$，

又$a_1=2$，$a_2=4$，$a_2-a_1=2$，满足$a_{n+1}-a_n=2$，

故数列$\{a_n\}$是公差为2的等差数列，通项公式为$a_n=2+(n-1)\times2=2n$. ………………………… 5分

(2)由题意得，$b_n^2=a_na_{n+2}=2n(2n+4)$，

则$\frac{1}{b_n^2}=\frac{1}{2n(2n+4)}=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$，

则$T_n=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{1}{8}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$. ………………………………………… 10分

18. 【解析】(1)因为四边形$ABCD$是平行四边形，$\angle ABC=45^\circ$，$AD=\sqrt{2}AB=\sqrt{2}$，

所以$BM=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AD=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

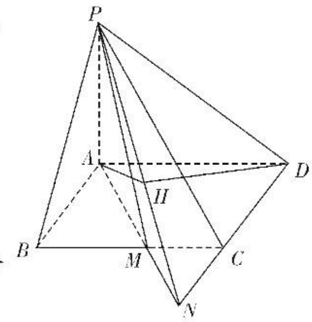
在$\triangle ABM$中，由余弦定理得$AM=\sqrt{AB^2+BM^2-2AB\cdot BM\cdot\cos\angle ABC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以$AM^2+BM^2=AB^2$，所以$\angle AMB=90^\circ$，即$AM\perp BC$，所以$AM\perp AD$，

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $AP\perp AD$，

又因 $AP\cap AM=A$，所以 $AD\perp$ 平面 PAM. ………………………………………………………… 5 分

(2)**法一**：由(1)可得 $AD\perp$ 平面 PAM，延长 AM 交 DC 的延长线于 N，连接 PN，



则平面 $APM\cap$ 平面 $PCD=PN$，

因为 $AP=AB=1$，$AD=BC=\sqrt{2}$，又 $AN=2AM=\sqrt{2}$，

所以 $DN=2$，$PD=PN=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$，所以 $PC\perp DN$，

过 D 作 $DH\perp PN$ 于 H，连接 AH，又 $AD\perp PN$，则 $AH\perp PN$，

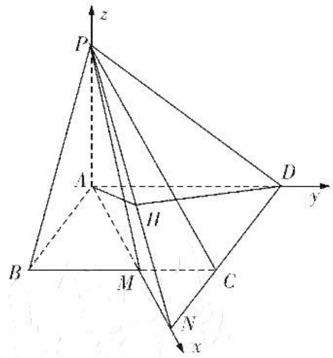
则 $\angle AHD$ 为平面 PAM 与平面 PCD 所成夹角，……………………………… 9 分

在 Rt$\triangle PAN$ 中，$AH=\dfrac{AP\cdot AN}{PN}=\dfrac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

所以 $\tan\angle AHD=\dfrac{AD}{AH}=\dfrac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{6}}{3}}=\sqrt{3}$，………………………………………………………… 11 分

所以 $\angle AHD=60^\circ$，即平面 PAM 与平面 PCD 所成夹角大小为 60°. ……………………………… 12 分

法二：因为 $AD\perp$ 平面 PAM，所以 $AD\perp AM$，



以 A 为原点，AM，AD，AP 分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，

则 $A(0,0,0)$，$P(0,0,1)$，$M\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},0,0\right)$，$D(0,\sqrt{2},0)$，$C\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right)$. …… 6 分

设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{PD}=(0,\sqrt{2},-1)$，$\overrightarrow{PC}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},-1\right)$，

所以 $\begin{cases}\overrightarrow{PD}\cdot\boldsymbol{n}=\sqrt{2}y-z=0,\\ \overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{n}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y-z=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}z=\sqrt{2}y,\\ x=y,\end{cases}$ 令 $y=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,1,\sqrt{2})$. ………………………………………………… 8 分

由(1)可知平面 PAM 的一个法向量为 $\overrightarrow{AD}=(0,\sqrt{2},0)$. ………………………………………… 9 分

设平面 PAM 与平面 PCD 所成夹角为 θ，

则 $\cos\theta=\left|\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\boldsymbol{n}|\,|\overrightarrow{AD}|}\right|=\dfrac{1\times0+1\times\sqrt{2}+\sqrt{2}\times0}{\sqrt{1^2+1^2+(\sqrt{2})^2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$. ………………………………………… 11 分

又 θ 为锐角，所以 $\theta=60^\circ$，

故平面 PAM 与平面 PCD 所成夹角为 60°. ………………………………………………………………… 12 分

19.**【解析】**(1)在 $\triangle BCE$ 中，由余弦定理得 $BC^2=BE^2+CE^2-2BE\times CE\cos\angle BEC=36$，

即 $36=BE^2+CE^2-2BE\times CE\cos 60^\circ=BE^2+CE^2-BE\times CE$

$=(BE+CE)^2-3BE\times CE\geqslant(BE+CE)^2-\dfrac{3(BE+CE)^2}{4}=\dfrac{(BE+CE)^2}{4}$，

所以 $BE+EC\leqslant12$，当且仅当 $BE=EC=6$ 千米时等号成立.

则分界线 BE 与 CE 的长度之和的最大值为 12 千米. ………………………………………………… 6 分

(2)设 $\angle BEA=\alpha$，由 $\angle BEC=60^\circ$，得 $\angle CED=120^\circ-\alpha$，其中 $30^\circ<\alpha<90^\circ$，

因为 $CD=2AB=6$，所以 $BE=\dfrac{AB}{\sin\alpha}=\dfrac{3}{\sin\alpha}$，$CE=\dfrac{CD}{\sin(120^\circ-\alpha)}=\dfrac{6}{\sin(120^\circ-\alpha)}$，……………………… 8 分

所以 $S_{\triangle BCE}=\dfrac{1}{2}BE\cdot CE\cdot\sin\angle BEC=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{\sin\alpha}\times\dfrac{6}{\sin(120^\circ-\alpha)}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{\sin\alpha\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\dfrac{1}{2}\sin\alpha\right)}=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin 2\alpha+\dfrac{1-\cos 2\alpha}{4}}=\dfrac{18\sqrt{3}}{2\sin(2\alpha-30^\circ)+1}$，…………………… 10 分

当 $2\alpha-30^\circ=90^\circ$，即 $\alpha=60^\circ$ 时，$(S_{\triangle CBE})_{\min}=6\sqrt{3}$（平方千米）.

即休闲赏花区 $\triangle BCE$ 面积的最小值为 $6\sqrt{3}$ 平方千米. …………………… 12 分

20.【解析】(1) 由题意得 $F_1(-c,0)$，$B(0,b)$，设 $A(x,y)$，

因为 $\overrightarrow{BO}=\dfrac{5}{3}\overrightarrow{A_1A}$，所以 $\overrightarrow{BF_1}=\dfrac{5}{3}\overrightarrow{F_1A}$，

所以 $(-c,-b)=\dfrac{5}{3}(x+c,y)$，得 $\begin{cases}x=-\dfrac{8}{5}c,\\ y=-\dfrac{3}{5}b,\end{cases}$ 即 $A\left(-\dfrac{8}{5}c,-\dfrac{3}{5}b\right)$，

因为点 A 在椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上，所以 $\dfrac{\frac{64c^2}{25}}{a^2}+\dfrac{\frac{9b^2}{25}}{b^2}=1$，化简得 $a=2c$，

所以 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{4c^2-c^2}=\sqrt{3}c$，

又 $\triangle ABF_2$ 的周长为 $|BF_1|+|BF_2|+|AF_1|+|AF_2|=2a+2a=4a=8$，

所以 $a=2$，$c=1$，$b=\sqrt{3}$，

所以椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. …………………… 5 分

(2) 设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，PQ 的中点为 $H(x_0,y_0)$.

设直线 l 的方程为 $x=my+1$，

联立方程 $\begin{cases}x=my+1,\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 整理得 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$，

由题意可知，$m\neq 0$，则 $y_1+y_2=-\dfrac{6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=-\dfrac{9}{3m^2+4}$，…………………… 7 分

$\therefore |PQ|=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\dfrac{12(m^2+1)}{3m^2+4}$. …………………… 8 分

$\because H(x_0,y_0)$ 为 PQ 的中点，$\therefore y_0=\dfrac{-3m}{3m^2+4}$，$x_0=my_0+1=\dfrac{4}{3m^2+4}$，即 $H\left(\dfrac{4}{3m^2+4},-\dfrac{3m}{3m^2+4}\right)$.

直线 l_1 的方程可设为 $x=-\dfrac{1}{m}\left(y+\dfrac{3m}{3m^2+4}\right)+\dfrac{4}{3m^2+4}$，

令 $y=0$ 得 $x=\dfrac{1}{3m^2+4}$，则 $|F_2G|=\left|1-\dfrac{1}{3m^2+4}\right|=\dfrac{3(m^2+1)}{3m^2+4}$，…………………… 10 分

$\therefore \lambda=\dfrac{|PQ|}{|F_2G|}=\dfrac{\frac{12(m^2+1)}{3m^2+4}}{\frac{3(m^2+1)}{3m^2+4}}=4$. …………………… 11 分

综上所述，$\lambda=\dfrac{|PQ|}{|F_2G|}$ 为定值，且定值为 4. …………………… 12 分

21.【解析】(1) 依题意，门将每次可以扑出点球的概率为 $p=C_3^1\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$，…………………… 1 分

门将在前五次扑出点球的个数 X 可能的取值为 0，1，2，3，4，5，

$P(X=0)=C_5^0\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^0\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^5=\dfrac{243}{1024}$，$P(X=1)=C_5^1\times\left(\dfrac{1}{4}\right)\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^4=\dfrac{405}{1024}$，

$P(X=2)=C_5^2\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^3=\dfrac{270}{1024}=\dfrac{135}{512}$，$P(X=3)=C_5^3\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^3\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{90}{1024}=\dfrac{45}{512}$，

$P(X=4)=C_5^4\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^4\times\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{15}{1024}$，$P(X=5)=C_5^5\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^5\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^0=\dfrac{1}{1024}$. …………………… 5 分

X 的分布列如下表：

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{243}{1024}$	$\frac{405}{1024}$	$\frac{135}{512}$	$\frac{45}{512}$	$\frac{15}{1024}$	$\frac{1}{1024}$

期望 $E(X)=0\times\frac{243}{1024}+1\times\frac{405}{1024}+2\times\frac{135}{512}+3\times\frac{45}{512}+4\times\frac{15}{1024}+5\times\frac{1}{1024}=\frac{5}{4}$.

$\left(\text{或 } E(X)=5\times\frac{1}{4}=\frac{5}{4}\right)$ ······························ 7 分

(2)①第 n 次传球之前球在姚伟脚下的概率为 p_n，则当 $n\geqslant 2$ 时，第 $n-1$ 次传球之前球在姚伟脚下的概率为 p_{n-1}，第 $n-1$ 次传球之前球不在姚伟脚下的概率为 $1-p_{n-1}$，

则 $p_n=p_{n-1}\cdot 0+(1-p_{n-1})\cdot\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}p_{n-1}+\frac{1}{3}$，从而 $p_n-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\left(p_{n-1}-\frac{1}{4}\right)$，

又 $p_1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，所以数列 $\left\{p_n-\frac{1}{4}\right\}$ 是以 $\frac{3}{4}$ 为首项，$-\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列. ······························ 10 分

②由①可知 $p_n=\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{4}$，$p_{10}=\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{9}+\frac{1}{4}<\frac{1}{4}$，

因为 $q_{10}=\frac{1}{3}(1-p_{10})>\frac{1}{4}$，故 $p_{10}<q_{10}$. ······························ 12 分

22.【解析】(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f'(x)=e^x-a$，

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\ln a$.

若 $x<\ln a$，则 $f'(x)<0$，此时函数 $f(x)$ 单调递减，

若 $x>\ln a$，则 $f'(x)>0$，此时函数 $f(x)$ 单调递增.

综上所述，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增. ······························ 4 分

(2)当 $x=0$ 时，$F(0)=e^0-0-1+\sin 0=0$，$\therefore x=0$ 是 $F(x)$ 的一个零点，······························ 5 分

由已知 $F(x)=e^x-ax+\sin x-1$，$\therefore F'(x)=e^x-a+\cos x$，

令 $h(x)=F'(x)=e^x-a+\cos x$，可得 $h'(x)=e^x-\sin x$.

$\because 1\leqslant a<2$，

①当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$e^x>1$，$\therefore h'(x)>1-\sin x\geqslant 0$，

$\therefore F'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore F'(x)>F'(0)=2-a>0$，$\therefore F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore F(x)>F(0)=0$，此时 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上无零点. ······························ 6 分

②当 $x\in(-\infty,-\pi]$ 时，$-ax\geqslant\pi$，有 $F(x)=e^x-ax+\sin x-1\geqslant e^x+\pi+\sin x-1>0$，

此时 $F(x)$ 在 $(-\infty,-\pi]$ 上无零点. ······························ 8 分

③当 $x\in(-\pi,0)$ 时，$\sin x<0$，$h'(x)=e^x-\sin x>0$，

$\therefore F'(x)$ 在 $(-\pi,0)$ 上单调递增，又 $F'(0)=2-a>0$，$F'(-\pi)=e^{-\pi}-a-1<0$，

由零点存在性定理知，存在唯一 $x_0\in(-\pi,0)$，使得 $F'(x_0)=0$.

当 $x\in(-\pi,x_0)$ 时，$F'(x)<0$，$F(x)$ 在 $(-\pi,x_0)$ 上单调递减；

当 $x\in(x_0,0)$ 时，$F'(x)>0$，$F(x)$ 在 $(x_0,0)$ 上单调递增，

又 $F(-\pi)=e^{-\pi}+a\pi-1>0$，$F(x_0)<F(0)=0$，

$\therefore F(x)$ 在 $(-\pi,0)$ 上有 1 个零点.

综上，当 $1\leqslant a<2$ 时，$F(x)$ 有 2 个零点. ······························ 12 分