2023届4月质量监测考试

文科数学参考答案

1. B　**解析：** 因为全集 $U=\{2,3,4,5,6,7\}$，$A\cup B=\{2,4,5,6\}$，所以 $C_U(A\cup B)=\{3,7\}$，故选：B.

2. D　**解析：** $\because (6-8\mathbf{i})\cdot z=25\cdot\left|-1+\sqrt{3}\,\mathbf{i}\right|$，$\therefore (6-8\mathbf{i})\cdot z=25\cdot\left|-1+\sqrt{3}\,\mathbf{i}\right|=25\times 2$，

$\therefore z=\dfrac{25}{3-4\mathbf{i}}=3+4\mathbf{i}$，所以 $\overline{z}=3-4\mathbf{i}$. 故选：D.

3. D　**解析：** $\because 5^y=20\Leftrightarrow y=\log_5 20$，$x=\log_{0.4}0.15>\log_{0.4}0.16=2$

$y=\log_5 20$，由 $\log_5 5<\log_5 20<\log_5 25$，即 $1<\log_5 20<2$，故 $1<y<2$

$\therefore 1<y<x$，可得 $z=0.4^{0.5}<0.4^0=1$，即 $z<1$

综上：$z<y<x$，故选：D.

4. A　**解析：** 由题意，$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BA}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$，解之得 $\overrightarrow{BA}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BE}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CE}$，即 $\overrightarrow{CD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BE}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CE}$. 故选：A.

5. D　**解析：** 因为 $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)$

$=(\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\theta+\cos\dfrac{\pi}{4}\sin\theta)(\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\theta-\cos\dfrac{\pi}{4}\sin\theta)$

$=\dfrac{1}{2}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$

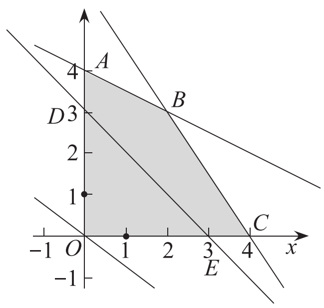
$=\dfrac{1}{2}(\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta})$

$=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta})$

所以 $\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{1}{3}$，$\therefore \tan^2\theta=\dfrac{1}{2}$，$\therefore \tan\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 故选：D.

6. A　**解析：** 设食品厂生产A和B半成品食物分别为 x、y 吨，

由题意可列 $\begin{cases}3x+2y\leqslant 12\\ x+2y\leqslant 8\\ x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}$，其表示如图阴影部分区域，$B(2,3)$，



其面积为10.

由题意，$z=3x+3y\leqslant 9$ 与 x 轴，y 轴围成的图形面积为 $\dfrac{1}{2}\times 3\times 3=\dfrac{9}{2}$，

故每天可获利润不超过9万元的概率为 $\dfrac{9}{20}$. 故选：A.

7. C　**解析：** 如图：由于木材直径为 D，

$W=\dfrac{1}{6}BH^2=\dfrac{1}{6}\sqrt{D^2-H^2}\cdot H^2=\dfrac{1}{6}\sqrt{(D^2-H^2)\cdot H^4}$，

设 $g(H)=(D^2-H^2)\cdot H^4$，

所以 $g'(H)=-6H^3(H^2-\dfrac{2}{3}D^2)=0$，$\therefore H=\dfrac{\sqrt{6}}{3}D$，

因为 $g(H)$ 只有一个极值点，

所以 $H=\dfrac{\sqrt{6}}{3}D$ 时，W 最大，此时 $B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}D$，即 $H:B=\sqrt{2}:1$，故选C.

8. D　**解析**：根据题意，$A(-2,0)$，$B(2,0)$，$C(0,4)$，设 $\triangle ABC$ 外接圆方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

则 $\begin{cases}4-2D+F=0\\4+2D+F=0\\16+4E+F=0\end{cases}$，　解得 $\begin{cases}D=0\\E=-3\\F=-4\end{cases}$

$\therefore$ $\triangle ABC$ 外接圆方程为 $x^2+y^2-3y-4=0$，即 $x^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{25}{4}$

则圆心 $M\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ 到到直线 l：$3x-4y-9=0$ 的距离为 $\dfrac{\left|3\times0-4\times\dfrac{3}{2}-9\right|}{5}=3$.故选：D.

9. C　**解析**：由题意，$\begin{cases}2a+2b+c=0.018\\2b=a+c\\b-a=0.002\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=0.002\\b=0.004\\c=0.006\end{cases}$

故 $40\times(0.0005+0.002+0.004+0.006)=0.5$，则中位数为160．故选：C.

10. D　**解析**：因为 $f(x+1)+f(3-x)=0$，所以 $f(2-x)=-f(x)$，故 $f(x)$ 关于点（1，0）对称.

$\because f(-2x+1)=f(3+2x)$，$\therefore f(4-x)=f(x)$，故 $f(x)$ 关于直线 $x=2$ 对称.

由 $f(4-x)=-f(2-x)$，所以 $f(x)$ 的周期为4.

当 $x\in[1,2]$ 时，$2-x\in[0,1]$，所以 $f(x)=-f(2-x)=(x-1)^3$，

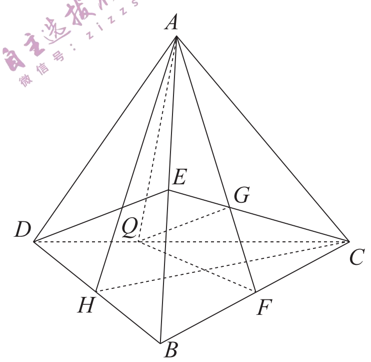
同理可得 $x\in[2,4]$ 时，$f(x)=(3-x)^3$

当 $x\in[0,4]$ 时，$f(x)>\dfrac{1}{8}$ 的解集为 $(\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2})$，

所以 $f(x)>\dfrac{1}{8}$ 在实数集上的解集为 $(4k+\dfrac{3}{2},4k+\dfrac{5}{2})$，$k\in Z$

令k=2，可知D正确.故选：D.

11. D　**解析**：取 BD 的中点 H，连接 AH，CH，如图，$CH\perp BD$，$AH\perp BD$，



而 $CH\subset$ 平面 AHC，$AH\subset$ 平面 AHC，$CH\cap AH=H$，于是得 $BD\perp$ 平面 AHC，又 $AC\subset$ 平面 AHC，所以 $BD\perp AC$.故①正确；

当 $\dfrac{CQ}{DQ}=2$ 时，连接 CE 交 AF 于 G，连接 QG，F、E 分别是 BC、AB 的中点，

则 G 是 $\triangle PBC$ 的重心，有 $\dfrac{CG}{GE}=2$，即有 $\dfrac{CQ}{DQ}=\dfrac{CG}{GE}$，因此 $QG//DE$，

而 $DE\not\subset$ 平面 AFQ，$QG\subset$ 平面 PFD，所以 $DE//$ 平面 AFQ，故②正确；

当平面 ABD 与平面 CBD 垂直时，A 到平面 CBD 的距离最大，故 $\angle AHC = 90°$. 设 $\triangle ABD$ 与 $\triangle CBD$ 的外心为 O_1 与 O_2，过 O_1 作垂直于平面 $\triangle ABD$ 的直线 l_1，过 O_2 作垂直于平面 $\triangle CBD$ 的直线 l_2，则 l_1 与 l_2 的的交点即为外接球的球心 O，故 O，O_1，H，O_2 四点共圆，所以 $OO_2 = HO_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

故 $R = \sqrt{OO_2^2 + CO_2^2} = \sqrt{\dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{3}} = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$，从而外接球的表面积为 $4\pi R^2 = \dfrac{20}{3}\pi$，故③正确；

故选：D.

12. A　**解析：** 当 $k \in \mathbf{N}^*$ 时，$a_{2k+1} = a_{2k} + 1 = a_{(2k-1)} + 1 = \dfrac{2k+1}{2k-1}a_{2k-1}$，即 $\dfrac{a_{2k+1}}{2k+1} = \dfrac{a_{2k-1}}{2k-1}$.

所以当 n 为奇数时，$\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$ 是常数列.

又 $a_1 = 1$，所以当 n 为奇数时，$\dfrac{a_n}{n} = \dfrac{a_1}{1} = 1$，即 $a_n = n$.

当 n 为偶数时，$a_n = a_{n+1} - 1 = n + 1 - 1 = n$，

所以当 $n \in \mathbf{N}^*$ 时，$a_n = n$，$\therefore a_n \cdot 2^{a_n} = n \cdot 2^n$

$T_n = 1 \times 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \cdots + n \times 2^n$，

$2T_n = 1 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + \cdots + (n-1)2^n + n \cdot 2^{n+1}$，

所以 $-T_n = 2 + 2^2 + \cdots + 2^n - n \cdot 2^{n+1} = \dfrac{2(1-2^n)}{1-2} - n \cdot 2^{n+1} = 2^{n+1} - 2 - n \cdot 2^{n+1}$，

所以 $T_n = (n-1)2^{n+1} + 2. T_{2023} = 2022 \cdot 2^{2024} + 2$. 故选：A.

13. $x + 2y + 4\ln 2 = 0$　**解析：** 因为 $f'(x) = -\dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{x^2}$，所以 $f'(2) = -1 + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$. 所以切线方程为 $y + 1 + 2\ln 2 = -\dfrac{1}{2}(x-2)$，整理可得，$x + 2y + 4\ln 2 = 0$.

14. $e^{0.35}$　**解析：** $\bar{x} = \dfrac{3+4+6+7}{4} = 5$，$\bar{z} = \dfrac{2.5+3+4+5.9}{4} = 3.85$，

$3.85 = 0.7 \times 5 + a$，$a = 3.85 - 0.7 \times 5 = 0.35$，

所以 $\hat{z} = 0.7x + 0.35$，由 $z = \ln y$，得 $\ln y = 0.7x + 0.35$，$y = e^{0.7x+0.35} = e^{0.35} \cdot e^{0.7x}$，

所以 $c = e^{0.35}$.

15. $\dfrac{\pi}{6}$　**解析：** 函数 $f(x) = \cos(2x + \varphi)(0 < \varphi < \pi)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位后，

得到的图象对应的解析式是：$y = \cos\left[2\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) + \varphi\right] = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3} + \varphi\right)$，

由于该函数为偶函数，故 $-\dfrac{\pi}{3} + \varphi = k\pi$，$k \in Z$，因为 $0 < \varphi < \pi$，所以 $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$，

函数 $f(x) = \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ 的减区间为 $\left[k\pi - \dfrac{\pi}{6},\ k\pi + \dfrac{\pi}{3}\right]$，$k \in Z$，而函数又在 $[-a,\ a]$ 上单调递减，

所以 $\begin{cases} -\dfrac{\pi}{6} \leqslant -a \\ \dfrac{\pi}{3} \geqslant a \end{cases}$，于是 $0 < a \leqslant \dfrac{\pi}{6}$. 故 a 的最大值为 $\dfrac{\pi}{6}$.

16. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　**解析：** 根据图形特点，以对称中心为原点，设截面双曲线所在的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$，则 $a = 1$，曲线一点坐标为 $(2,\ 1)$，代入方程可得 $b^2 = \dfrac{1}{3}$，所以 $c^2 = \dfrac{4}{3}$，$\therefore e = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

17. 解：（1）因为 $\sin A \sin B = \sin^2 A - 2\sin^2 B$，所以 $ab = a^2 - 2b^2$，

解之得 $a = 2b$.…………………………………………………………………………………… （2分）

因为 $S = 3\pi$，所以 $2R = 2\sqrt{3}$，所以 $2R = \dfrac{c}{\sin C}$，$\therefore \sin C = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $C = \dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{2\pi}{3}$. …………………………………………………………………… （3分）

当 $C = \dfrac{\pi}{3}$，$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$，$\therefore 9 = 5b^2 - 4b^2 \times \dfrac{1}{2} = 3b^2$，$\therefore b = \sqrt{3}$，$a = 2\sqrt{3} > c$（舍），

…………………………………………………………………………………………………… （5分）

当 $C = \dfrac{2\pi}{3}$，$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$，$\therefore 9 = 5b^2 + 4b^2 \times \dfrac{1}{2} = 5b^2$，$\therefore b = \dfrac{3\sqrt{7}}{7}$，$a = \dfrac{6\sqrt{7}}{7} < c$，

故 $b = \dfrac{3\sqrt{7}}{7}$. …………………………………………………………………………… （7分）

（2）因为 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD}$，所以 $\dfrac{1}{2}ab\sin C = \dfrac{1}{2}CD \cdot b\sin\angle ACD + \dfrac{1}{2}CD \cdot a\sin\angle BCD$

…………………………………………………………………………………………………… （9分）

所以 $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{6\sqrt{7}}{7} \times \dfrac{3\sqrt{7}}{7}\sin 120° = \dfrac{1}{2}CD \cdot \dfrac{3\sqrt{7}}{7}\sin 60° + \dfrac{1}{2}CD \cdot \dfrac{6\sqrt{7}}{7}\sin 60°$. ………… （10分）

故 $CD = \dfrac{2\sqrt{7}}{7}$. ………………………………………………………………………… （12分）

18. 解：（1）连接 OF，O_1O，因为 O 为 CD 的中点，所以 $OF // CE$， ………………………… （1分）

又 $CE \subset$ 平面 AEC，$OF \not\subset$ 平面 AEC，所以 $OF //$ 平面 AEC，

由四边形 O_1AEO 为矩形，所以 $O_1O // AE$，……………………………………………… （2分）

又 $AE \subset$ 平面 AEC，$O_1O \not\subset$ 平面 AEC，所以 $O_1O //$ 平面 AEC，……………………… （3分）

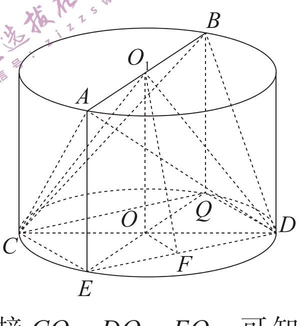
因为 $O_1O \cap OF = O$，O_1O，$OF \subset$ 平面 O_1OF，

所以平面 $O_1OF //$ 平面 AEC， ……………………………………………………………… （4分）

因为 $O_1F \subset$ 平面 DOF，

所以 $O_1F //$ 平面 ACE， …………………………………………………………………… （5分）

（2）



分别过 B 作圆柱的母线 BQ，连接 CQ，DQ，EQ，可知 $AB // EQ$，所以 $\angle COE$ 为异面直线 AB 与 CD 所成的角（或其补角），故 $\angle COQ = 60°$ 或 $120°$，

又 $CE > DE$，故 $\angle COQ = 60°$， ……………………………………………………………… （6分）

连接 CO_1，DO_1，$OO_1 \perp$ 平面 O， ……………………………………………………… （7分）

故点A到平面 O_1CD 的距离为 $1 \cdot \sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

同样点B到平面 O_1CD 的距离为 $1 \cdot \sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$， …………………………………… （8分）

$S_{O_1CD}=\frac{1}{2}CD\cdot O_1O=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$， …………………………………………………… （9分）

所以 $V_{A-BCD}=V_{A-O_1CD}+V_{B-O_1CD}=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times 2=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. ………………………………………… （10分）

因为圆柱的体积为 $V=2\pi$， ………………………………………………………………… （11分）

故圆柱挖去三棱锥 $A-BCD$ 后的几何体的体积 $2\pi-\frac{2\sqrt{3}}{3}$. ……………………………………… （12分）

19. 解：（1）设零假设为 H_0：同学的红包保存情况与年龄大小无关，

根据数表可得 $\chi^2=\frac{100(15\times 50-25\times 10)^2}{75\times 25\times 60\times 40}=\frac{50}{9}>5.024$， ………………………………… （2分）

所以零假设 H_0 是错的，

故有97.5%的把握可以认为同学的红包保存情况与年龄大小有关. ………………………… （4分）

（2）根据题意，分层抽样选取8人，未交给父母保存红包的人数有 $8\times\frac{15}{40}=3$（人），

设为 a，b，c；

交给父母保存红包的人数有 $8\times\frac{25}{40}=5$（人），设为 A，B，C，D，E， ………………… （6分）

则8人随机抽取2人的所有结果为 (A,B)，(A,C)，(A,D)，(A,E)，(A,a)，(A,b)，(A,c)，(B,C)，(B,D)，(B,E)，(B,a)，(B,b)，(B,c)，(C,D)，(C,E)，(C,a)，(C,b)，(C,c)，(D,E)，(D,a)，(D,b)，(D,c)，(E,a)，(E,b)，(E,c)，(a,b)，(a,c)，(b,c) 共28种结果， ………………………………………… （8分）

其中满足均将红包交给父母保存的结果为 (A,B)，(A,C)，(A,D)，(A,E)，(B,C)，(B,D)，(B,E)，(C,D)，(C,E)，(D,E) 有10种（10分），

所以概率为 $\frac{10}{28}=\frac{5}{14}$. ……………………………………………………………… （12分）

20. 解：（1）设 $F_2(c,0)$，则 $\angle AF_2B=120°$，所以 $2b=\sqrt{3}a$.，$\therefore b=\sqrt{3}c$. ……………… （1分）

设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1$，即 $3x^2+4y^2-12c^2=0$，

$\because AF_2=a$，$OF_2=c$，$a=2c$，

$\therefore \angle AF_2O=\frac{\pi}{3}$，$\therefore \triangle AF_1F_2$ 为正三角形，

$\because$ 过 F_1 且垂直于 AF_2 的直线与 C 交于 D，E 两点，DE 为线段 AF_2 的垂直平分线，

$\therefore$ 直线 DE 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，斜率倒数为 $\sqrt{3}$， …………………………………………… （3分）

直线 DE 的方程：$x=\sqrt{3}y-c$，代入椭圆方程 $3x^2+4y^2-12c^2=0$，

整理化简得到：$13y^2-6\sqrt{3}cy-9c^2=0$，

判别式 $\Delta=\left(6\sqrt{3}c\right)^2+4\times 13\times 9c^2=6^2\times 16\times c^2$，

$\therefore |DE|=\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}\,|y_1-y_2|=2\times\frac{\sqrt{\Delta}}{13}=2\times 6\times 4\times\frac{c}{13}=\frac{48}{13}$. ……………… （4分）

$\therefore c=1$，所以 $a=2$.

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………………………………………………………… （5分）

（2） 设 $M(x_1,y_1)$，$P(-x_1,-y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$Q(x_3,y_3)$

因为$F_2(1,0)$，所以$\frac{y_1}{x_1-1}=\frac{y_2}{x_2-1}$，即$y_1x_2-y_2x_1=y_1-y_2$①， ……………………… （6分）

又因为点M，N均在椭圆上，所以$\begin{cases}\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1\\ \frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{3}=1\end{cases}$，

两式整理，可得，$\frac{y_1^2x_2^2-y_2^2x_1^2}{4}=y_1^2-y_2^2$②，

由②除以①可得$\frac{y_1x_2+y_2x_1}{4}=y_1+y_2$，消元可得$\begin{cases}x_2=\frac{5x_1-8}{2x_1-5}\\ y_2=\frac{3y_1}{2x_1-5}\end{cases}$，

同理可得$\begin{cases}x_3=\frac{5x_1+8}{2x_1+5}\\ y_3=\frac{3y_1}{2x_1+5}\end{cases}$， ……………………………………………………………………… （8分）

所以直线NQ的方程为$y=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}x+\frac{y_2y_3-y_3y_2}{x_3-x_2}$，

又$\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=\frac{5y_1}{3x_1}$，$\frac{y_2x_3-y_3x_2}{x_3-x_2}=-\frac{8y_1}{3x_1}$， …………………………………………………… （10分）

所以直线NQ的方程为$y=\frac{y_1}{3x_1}(5x-8)$，故直线NQ过定点$\left(\frac{8}{5},0\right)$. ………………… （12分）

21. 解：（1）因为$f(x)=x(\ln x-a)(x>0)$，所以$f'(x)=\ln x+1-a$. ……………………… （1分）

令$f'(x)>0$，得$x>e^{a-1}$；令$f'(x)<0$，得$0<x<e^{a-1}$. ……………………………… （2分）

所以$f(x)$在$(0,e^{a-1})$上为减函数，在$(e^{a-1},+\infty)$上为增函数，

所以$f_{\min}(x)=f(e^{a-1})=-e^{a-1}$. ………………………………………………………… （3分）

所以$-e^{a-1}=-1$，$\therefore a=1$. ………………………………………………………………… （4分）

（2）由$f(x)+ax<e^x-\sin x+1$，可得$e^x-\sin x+1-x\ln x>0$. ……………………… （5分）

设$g(x)=e^x-\sin x+1-x\ln x$，$\therefore g'(x)=e^x-\cos x-1-\ln x$.

当$x\in(0,1)$时，$-\ln x>0$， ………………………………………………………………… （6分）

设$l(x)=e^x-\sin x-1(x>0)$，则$l'(x)=e^x-\cos x>0$，$\therefore l(x)$单调递增，

$\therefore l(x)>l(0)=0$，$\therefore$当$x\in(0,1)$时，$g(x)>0$恒成立. ………………………… （7分）

当$x\in[1,+\infty)$时，设$\varphi(x)=-\ln x+e^x-\cos x-1(x\geqslant 1)$，则$\varphi'(x)=-\frac{1}{x}+e^x+\sin x$，

$\because x\geqslant 1$，$\therefore e^x\geqslant e$，$\sin x\in[-1,1]$，$-\frac{1}{x}\in[-1,0)$，$\therefore\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$单调递增.

$\therefore\varphi(x)\geqslant\varphi(1)=e-\cos 1-1>0$. ………………………………………………… （8分）

$\therefore$当$x\in[1,+\infty)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，$\therefore g(x)\geqslant g(1)=e-\sin 1-1>0$，即当$x\in[1,+\infty)$时，$g(x)>0$恒成立.

由（1）可知：$x\ln x-x\geqslant -1$，$\therefore x\ln x\geqslant x-1$ ……………………………… （9分）

只需证$x-1>\sin x-1$，

需证$x>\sin x(x>0)$，设$h(x)=x-\sin x$.

$\therefore h'(x)=1-\cos x\geqslant 0$，所以$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，所以$h(x)>h(0)=0$ … （11分）

故$x>\sin x(x>0)$，即$x-1>\sin x-1$.

故 $\sin x-1<x\ln x<e^{x}-\sin x+1$，结论得证．……………………………………………… （12分）

22.（本小题满分10分）解：以极点为原点，极轴为x轴的正半轴，建立平面直角坐标系，

$\because \rho_1\cos\frac{\pi}{3}=2$，$\therefore \rho_1=4$，故$x=4\cos\frac{\pi}{3}=2$，$y=4\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$，

所以M点坐标为$(2,\ 2\sqrt{3})$. ……………………………………………………………………… （2分）

又$\rho_2=4\sqrt{3}\cdot\sin\frac{\pi}{6}=2\sqrt{3}$，所以$x=2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}=3$，$y=2\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$，

所以N点坐标为$(3,\ \sqrt{3})$. ………………………………………………………………………… （4分）

由$\rho^2\cos 2\theta=4$得：$\rho^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=4$，

故曲线C的直角坐标方程为：$x^2-y^2=4$. ………………………………………………………… （5分）

（2）因为$k_{AB}=-\sqrt{3}$，所以AB普通方程为$y=-\sqrt{3}x+4\sqrt{3}$，故$P(0,\ 4\sqrt{3})$，　……… （6分）

设AB的参数方程为$\begin{cases} x=-\frac{1}{2}t \\ y=4\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$，$t$为参数，与$x^2-y^2=4$.

联立得到，$t^2+24t+104=0$，

所以$t_1+t_2=-24$，$t_1t_2=104$，　………………………………………………………………… （8分）

所以$\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}=\frac{1}{|t_1|}+\frac{1}{|t_2|}=\frac{|t_1|+|t_2|}{|t_1\cdot t_2|}=\frac{|t_1+t_2|}{|t_1\cdot t_2|}=\frac{24}{104}=\frac{3}{13}$ ………………………… （10分）

23. 解：（1）当$x\geqslant 2$时，$f(x)=(x-1)x+(x-2)(x-1)=2(x-1)^2\geqslant 0$，所以$x\in\phi$…… （1分）

当$1<x<2$时，$f(x)=(x-1)x+(2-x)(x-1)=2(x-1)\leqslant 0$，$\therefore x\leqslant 1$，所以$x\in\phi$

……………………………………………………………………………………………………… （3分）

当$x\leqslant 1$时，$f(x)=(1-x)x+(2-x)(x-1)=-2(x-1)^2\leqslant 0$，$\therefore x\leqslant 1$，

综上，$M=1$ ……………………………………………………………………………………… （5分）

（2）由于$[(a-2)+(b-1)+(c+1)]^2$

$=(a-2)^2+(b-1)^2+(c+1)^2+2[(a-2)(b-1)+(b-1)(c+1)+(c+1)(a-2)]$

$\leqslant 3\left[(a-2)^2+(b-1)^2+(c+1)^2\right]$，　（8分）

所以$(a-2)^2+(b-1)^2+(c+1)^2\geqslant\frac{[(a-2)+(b-1)+(c+1)]^2}{3}=\frac{(a+b+c-2)^2}{3}=\frac{1}{3}$，

故$(a-2)^2+(b-1)^2+(c+1)^2\geqslant\frac{1}{3}$.　……………………………………………………… （10分）