

2022-2023 学年第二学期期末试卷

高二数学

注意事项:

1. 本试卷考试时间为 120 分钟, 试卷满分 150 分, 考试形式闭卷.
2. 本试卷中所有试题必须作答在答题卡上规定的位置, 否则不给分.
3. 答题前, 务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水签字笔填写在试卷及答题卡上.

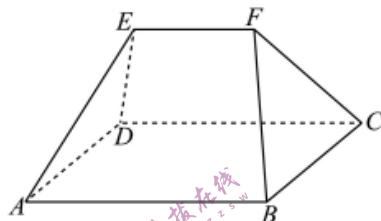
第 I 卷 (选择题 共 60 分)

一、单项选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的, 请把答案填涂在答题卡相应位置上.

1. 已知集合 $A = \{x | \frac{x+1}{x-5} > 0\}$, $B = \{x | x < 4\}$, 则 $B \cap C_{\mathbb{R}} A =$
A. $\{x | -1 < x < 4\}$ B. $\{x | x < 4\}$
C. $\{x | -1 \leq x < 4\}$ D. $\{x | x \leq -1\}$
2. 已知 $\frac{z}{1+i} = \frac{1+i}{1-i}$ (i 为虚数单位), 则复数 z 的模为
A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. 3
3. 已知 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是平面中两个不共线的向量, 若 $\vec{a} = \lambda \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{b} = \vec{e}_1 + \mu \vec{e}_2$, 且 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则
A. $\lambda + \mu = 1$ B. $\lambda + \mu = -1$ C. $\lambda \mu = 1$ D. $\lambda \mu = -1$
4. 各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$, 公比为 q , 则 “ $q > 1$ ” 是 “ $\{a_n\}$ 为递增数列” 的
A. 充分且不必要条件 B. 必要且不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件
5. 已知函数 $f(x) = \log_2[x(a-x)]$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递增, 则 a 的取值范围是
A. $(-\infty, -2]$ B. $[-2, 0)$ C. $(0, 2]$ D. $[2, +\infty)$
6. 五张卡片上分别写有 1, 2, 3, 4, 5 五个数字, 则这五张卡片组成的五位数是偶数的概率
A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{7}$

7. 故宫太和殿是中国形制最高的宫殿，其建筑采用了重檐庑殿顶的屋顶样式，庑殿顶是“四出水”的五脊四坡式，由一条正脊和四条垂脊组成，因此又称五脊殿．由于屋顶有四面斜坡，故又称四阿顶．如图，某几何体 $ABCDEF$ 有五个面，其形状与四阿顶相类似．已知底面 $ABCD$ 为矩形， $EF \parallel$ 底面 $ABCD$ ， $AB=2BC=2EF=4$ ， $\triangle ADE$ 与 $\triangle BCF$ 是全等的等边三角形，则该五面体 $ABCDEF$ 的体积为

- A. $2\sqrt{3}$ B. $\frac{10\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{7\sqrt{2}}{3}$ D. $3\sqrt{3}$



(第7题)

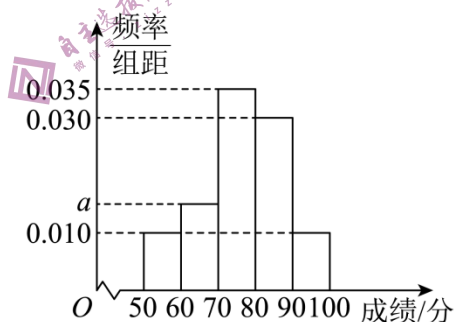
8. 直线 l 过圆 $M: (x-5)^2 + y^2 = 1$ 的圆心，且与圆相交于 A, B 两点， P 为双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

右支上一个动点，则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的最小值为

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

二、多项选择题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，请把答案填涂在答题卡相应位置上．全部选对得5分，部分选对得2分，不选或有错选的得0分．

9. 某班50名学生参加数学竞赛，将所有成绩分成 $[50,60)$, $[60,70)$, $[70,80)$, $[80,90)$, $[90,100]$ 五组，成绩的频率分布直方图如图所示，则下列说法正确的是



- A. a 的值为 0.015 (第9题)

B. 这50名同学成绩的平均数在60与70之间

C. 这50名同学成绩的众数是75

D. 估计这50名同学成绩的75百分位数为85

10. 下列命题正确的是

- A. 已知命题 P : 任意 $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq x$, 则命题 P 的否定为: 存在 $x \in \mathbb{R}$, $|x| < x$
- B. 若关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $\{x | 2 < x < 3\}$, 则 $a - b + c > 0$
- C. 如果 $x > 0$, $y > 0$, $x + 3y + xy = 9$, 那么 $x + 3y$ 的最小值为 6
- D. 函数 $f(x) = \frac{x^2 + 5}{\sqrt{x^2 + 4}}$ 的最小值为 2

11. 设函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) + \cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$, $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$) 的最小正周期为 π , 且过点 $(0, \sqrt{2})$, 则下列说法正确的是

- A. $f(x)$ 为偶函数
- B. $f(x)$ 的一条对称轴为 $x = \frac{\pi}{2}$
- C. 把 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$, 则 $g(x) = \sqrt{2}\cos(2x + \frac{\pi}{6})$
- D. 若 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递减, 则 a 的取值范围为 $(0, \frac{\pi}{2}]$

12. 已知 F 是抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点, A, B 是抛物线 C 上的两点, O 为坐标原点, 则

- A. 抛物线 C 的准线方程为 $x = -2$
- B. 若 $|AF| = 4$, 则 $\triangle AOF$ 的面积为 $\sqrt{3}$
- C. 若直线 AB 过焦点 F , 且 $AB = \frac{16}{3}$, 则 O 到直线 AB 的距离为 $\frac{1}{2}$
- D. 若 $OA \perp OB$, 则 $|OA| \cdot |OB| \geq 32$

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 请把答案填写在答题卡相应位置上.

13. 已知 $\tan \alpha = 2$, 则 $1 + \sin 2\alpha = \underline{\hspace{1cm} \blacktriangle \hspace{1cm}}$.

14. $(x-2)(x+1)^6$ 展开式中, x^3 的系数为 $\underline{\hspace{1cm} \blacktriangle \hspace{1cm}}$. (以数字形式作答).

15. 函数 $f(x) = x \ln x - x^2$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $\underline{\hspace{1cm} \blacktriangle \hspace{1cm}}$.

16. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 面 ABC , $\triangle ABC$ 为等边三角形, 且 $PA = AB = \sqrt{3}$, 则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为 $\underline{\hspace{1cm} \blacktriangle \hspace{1cm}}$.

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤．

17. (本小题满分 10 分)

袋子中有 6 个大小相同的小球，其中 4 个白球、2 个黑球．

(1) 每次从袋子中随机摸出 1 个球，摸完不放回，共摸 2 次，求第二次摸到的球是白球的概率；

(2) 一次完整的试验要求：从袋子中随机摸出 1 个球，记录小球的颜色后再把小球放回袋中．试验终止的条件是黑色小球出现两次，或者试验进行了 4 次．设试验终止时试验的次数为 X ，求随机变量 X 的数学期望．

18. (本小题满分 12 分)

$\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c ，满足：

$$a \cos A + a^2 (\cos C - 1) = b^2 - c^2,$$

(1) 求角 C ；

(2) 若 $c=2$ ，求 $a-b$ 的取值范围．

19. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = 2ax - e^x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 证明: 当 $a > 0$ 时, $f(x) \leq 4a^2 - 4a$.

20. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 2$, $\{\frac{S_n}{n}\}$ 是公差为 2 的等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

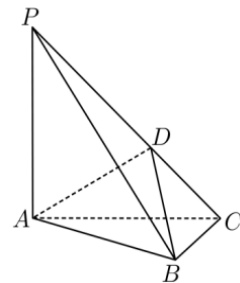
(2) 若 $b_n - b_{n-1} = 2a_n (n \geq 2)$, 且 $b_1 = 3$, 数列 $\{\frac{1}{b_n}\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_n .

21. (本小题满分 12 分)

如图所示, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, 已知 $PA \perp$ 平面 ABC , 平面 $PAB \perp$ 平面 PBC .

(1) 证明: $BC \perp$ 平面 PAB ;

(2) 若 $PA=AB=6$, $BC=3$, 在线段 PC 上(不含端点), 是否存在点 D , 使得二面角 $B-AD-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$, 若存在, 确定点 D 的位置; 若不存在, 说明理由.



(第 21 题)

22. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > 0$) 的右顶点和上顶点分别为 A, B , M 为线段 AB 的中点, O 为坐标原点, 且 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}b^2$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 3$, P 为圆 O 上任意一点, 过点 P 作椭圆 C 的切线, 交圆 O 于点 Q , 若 OP 与 OQ 斜率都存在, 求证: $k_{OP} \cdot k_{OQ}$ 为定值.