

郑州市 2022—2023 学年下学期期末考试 高中二年级数学 评分参考

一、单选题

二、1.A 2.D 3.A 4.B 5.C 6.B 7.B 8.C 9.D 10.C 11.C 12.D

三、填空题

13. $-\frac{1}{2}$; 14. $\frac{63}{1000}$; 15. 150; 16. $\frac{33}{8}$.

四、解答题

17. 解: (1) 设“第 1 次摸到白球”为事件 A; “第 2 次摸到白球”为事件 B.

$$\text{则 } P(A) = \frac{4 \times 9}{10 \times 9} = \frac{2}{5} \quad P(AB) = \frac{4 \times 3}{10 \times 9} = \frac{2}{15},$$

$$\text{由条件概率公式可得 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{3},$$

$\therefore$ 从袋子中任取两个小球, 若其中一个小球是白球, 另一个小球也是白球的概率为 $\frac{1}{3}$ 5 分

(2) X 可能的取值为 0, 1, 2, 3.

$$P(X=0) = \frac{C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{12}, \quad P(X=1) = \frac{C_5^1 C_5^2}{C_{10}^3} = \frac{5}{12}, \quad P(X=2) = \frac{C_5^2 C_5^1}{C_{10}^3} = \frac{5}{12}, \quad P(X=3) = \frac{C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{12},$$

概率分布为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

..... 10 分

18.(1) 证明: 由 $a_1=2$ 及 $S_{n+1}=4a_n+2$,

得 $a_1+a_2=S_2=4a_1+2$. $\therefore a_2=8$. $\therefore b_1=a_2-2a_1=4$.

$$\text{又 } \begin{cases} S_{n+1}=4a_n+2, \\ S_n=4a_{n-1}+2 \quad n \geq 2 \end{cases}, \quad \text{②}$$

由①-②, 得 $a_{n+1}=4a_n-4a_{n-1}(n \geq 2)$,

$$\therefore a_{n+1}-2a_n=2(a_n-2a_{n-1})(n \geq 2).$$

$$\therefore b_n=a_{n+1}-2a_n, \quad \therefore b_n=2b_{n-1}(n \geq 2),$$

故 $\{b_n\}$ 是首项 $b_1=4$, 公比为 2 的等比数列. 6 分

(2) 解 由(1)知 $b_n=a_{n+1}-2a_n=4 \cdot 2^{n-1}=2^{n+1}$,

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = 1,$$

故 $\left\{ \frac{a_n}{2^n} \right\}$ 是首项为 1, 公差为 1 的等差数列, $\frac{a_n}{2^n} = 1 + (n-1) = n$.

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19.解: (1) 水库的平均水位 $\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = 75.801$,

HN1 号渗压计管内平均水位 $\bar{y} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} y_i = 72.932$.

$$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{10} (x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2) = \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 2\bar{x} \cdot \sum_{i=1}^{10} x_i + 10\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 10\bar{x}^2,$$

同理可得: $\sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{10} y_i^2 - 10\bar{y}^2$,

$$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{10} (x_i y_i - \bar{x} y_i - \bar{y} x_i + \bar{x} \bar{y}) = \sum_{i=1}^{10} x_i y_i - 10\bar{x} \bar{y},$$

$$\begin{aligned} \therefore r &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i y_i - 10\bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10} y_i^2 - 10\bar{y}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 10\bar{x}^2}} \\ &= \frac{55283.2 - 10 \times 75.801 \times 72.932}{\sqrt{(57457.98 - 10 \times 75.801^2) \times (53190.77 - 10 \times 72.932^2)}} \approx 0.95 \dots\dots\dots 8 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$(3) \because \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i y_i - 10\bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 10\bar{x}^2} = \frac{55283.2 - 10 \times 75.801 \times 72.932}{57457.98 - 10 \times 75.801^2} \approx 0.2294 \approx 0.23,$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 72.932 - 0.2294 \times 75.801 = 55.50,$$

$\therefore$ HN1 号渗压计管内水位关于水库水位的经验回归方程为 $\hat{y} = 0.23x + 55.5$,

当 $x = 76$ 时, 预测值 $\hat{y} = 0.23 \times 76 + 55.5 = 72.98$,

即水库的水位为 76m 时, HN1 号渗压计管内水位的估计值为 72.98m12 分

20.解: (1) $f(x)$ 的定义域为 R , $f'(x) = (2e^x + 1)(ae^x - 1)$,

若 $a \leq 0$ 则 $ae^x - 1 < 0$ 恒成立, $\therefore f'(x) < 0$, 即 $f(x)$ 在 R 上单调递减;

若 $a > 0$ 令 $ae^x - 1 = 0$, 得 $x = -\ln a$,

当 $x \in (-\infty, -\ln a)$ 时 $f'(x) < 0$, 当 $x \in (-\ln a, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$.

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 上单调递减, 在 $(-\ln a, +\infty)$ 单调递增6 分

(2) 因为 $f(x)$ 有两个零点, 所以 $a > 0$, 否则 $f(x)$ 在 R 上单调递减, 至多一个零点,

与题设不符; 所以 $f(-\ln a) < 0$, 即 $a \times \left(\frac{1}{a}\right)^2 + (a-2) \times \frac{1}{a} + \ln a < 0$, 即 $1 - \frac{1}{a} + \ln a < 0$,

$$\text{令 } \phi(a) = 1 - \frac{1}{a} + \ln a, \quad \phi'(a) = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} > 0,$$

$\phi(a)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $\phi(1) = 0$, 故 a 的取值范围 $(0, 1)$.

又 $f(-2) = ae^{-4} + (a-2)e^{-2} + 2 > 0$, $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 上有一个零点;

设存在正整数 n_0 , 满足 $n_0 > \ln\left(\frac{3}{a}-1\right)$,

则 $f(n_0) = e^{n_0}(ae^{n_0} + a - 2) - n_0 > e^{n_0} - n_0 > 2^{n_0} - n_0 > 0$,

由于 $\ln\left(\frac{3}{a}-1\right) > -\ln a$ $\therefore f(x)$ 在 $(-\ln a, +\infty)$ 上有一个零点.

综上, a 的取值范围 $(0,1)$ 12 分

21.解:(1)由题可知, 单件产品为次品的概率为 0.015, 所以 $X \sim B(10, 0.015)$,

所以 $P(X=0) = C_{10}^0 \times 0.015^0 \times 0.985^{10} \approx 0.86$, $P(X=1) = C_{10}^1 \times 0.015^1 \times 0.985^9 \approx 0.1305$,

所以 $P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) \approx 0.0095$.

由 $P(X \geq 2) \approx 0.0095$ 可知, 如果生产状态正常, 一天内抽取的 10 个零件中, 至少出现 2 个次品的概率约为 0.0095, 该事件是小概率事件, 因此一旦发生这种状况, 就有理由认为设备在这一天的生产过程出现了异常情况, 需对设备进行检测和修理, 可见上述监控生产过程的规定是合理的.....6 分

(2)若先检测甲部件, 设检测费和修理费之和为 ξ 元, 则 ξ 的所有可能值为 8000, 9000,

则 $P(\xi=8000) = p$, $P(\xi=9000) = 1-p$,

所以 $E(\xi) = 8000p + 9000(1-p) = 9000 - 1000p$,

若先检测乙部件, 设检测费和修理费之和为 η 元, 则 η 的所有可能值为 7000, 11000,

则 $P(\eta=7000) = 1-p$, $P(\eta=11000) = p$,

所以 $E(\eta) = 7000(1-p) + 11000p = 7000 + 4000p$,

所以 $E(\xi) - E(\eta) = 2000 - 5000p$,

则当 $0 < p < \frac{2}{5}$ 时, $E(\xi) > E(\eta)$, 应先检测乙部件; 当 $p = \frac{2}{5}$ 时, $E(\xi) = E(\eta)$, 先检测甲部

件或乙部件均可; 当 $\frac{2}{5} < p < 1$ 时, $E(\xi) < E(\eta)$, 应先检测甲部件.....12 分

22.解: (1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$.

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(1) = \ln 1 + 1 = 1$ 4 分

(2)①法一: $g(x) = \ln x + a\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)$, $g'(x) = \frac{x^2 - 2a}{x^3}$.

$\therefore x^2 - 2a < \left(\frac{a}{1-a}\right)^2 - 2a = \frac{a(1-2a)(a-2)}{(1-a)^2} < 0$,

$\therefore g'(x) < 0$, 即 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{a}{1-a}\right)$ 上单调递减.

$$\therefore g(x) > g\left(\frac{a}{1-a}\right) = \ln\left(\frac{a}{1-a}\right) + \frac{1-2a}{a} = \ln\left(\frac{a}{1-a}\right) + \frac{1-a}{a} - 1.$$

由 (1) 知, $f(x)$ 的最小值为 $f(1)=1$, 即 $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$ (当且仅当 $x=1$ 时, 等号成立).

$$\therefore \ln\left(\frac{a}{1-a}\right) > 1 - \frac{1-a}{a}, \text{ 即 } g(x) > 0. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

法二: 由 (1) 知, $f(x)$ 的最小值为 $f(1)=1$,

即 $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$ (当且仅当 $x=1$ 时, 等号成立).

因为 $0 < a < \frac{1}{2}$, 所以 $0 < \frac{a}{1-a} < 1$.

$$\text{所以 } g(x) = \ln x + a\left(\frac{1}{x^2} - 1\right) > 1 - \frac{1}{x} + a\left(\frac{1}{x^2} - 1\right) = \frac{(x-1)[(1-a)x - a]}{x^2} > 0 \text{ 得证. } \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$