

大联考雅礼中学 2024 届高三三月考试卷（二）

数学

命题人：卿科 审题人：陈朝阳 匡鈿龄

得分：\_\_\_\_\_

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，共 8 页。时量 120 分钟，满分 150 分。

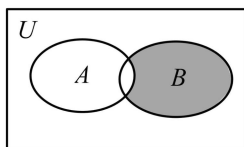
第 I 卷

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若  $z = 1 + 2i$ ，则  $(1+z) \cdot \bar{z} =$  ( )

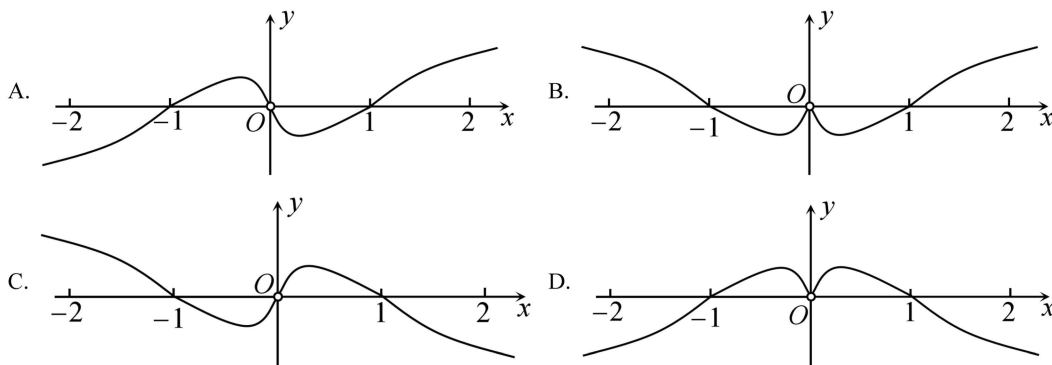
- A.  $-2 - 4i$                       B.  $-2 + 4i$                       C.  $6 - 2i$                       D.  $6 + 2i$

2. 全集  $U = \mathbf{R}$ ，集合  $A = \{2, 3, 5, 7, 9\}$ ， $B = \{4, 5, 6, 8\}$ ，则阴影部分表示的集合是 ( )



- A.  $\{2, 3, 5, 7, 9\}$                       B.  $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$                       C.  $\{4, 6, 8\}$                       D.  $\{5\}$

3. 函数  $f(x) = \frac{x \log_2 |x|}{2^x + 2^{-x}}$  的部分图象大致是 ( )

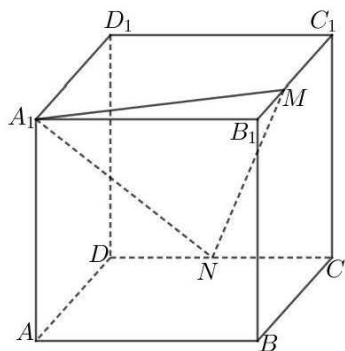


4. 在边长为 3 的正方形  $ABCD$  中，点  $E$  满足  $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB}$ ，则  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DE} =$  ( )

- A. 3                                      B. -3                                      C. -4                                      D. 4

5. 某校科技社利用 3D 打印技术制作实心模型。如图，该模型的上部分是半球，下部分是圆台。其中半球

- B. 函数  $f(x)$  的最小正周期为  $\pi$
- C. 函数  $f(x)$  的对称轴方程为  $x = k\pi + \frac{5\pi}{12} (k \in \mathbb{Z})$
- D. 函数  $f(x)$  的图象可由  $y = \sin 2x$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度得到
11. 设  $S_n$  是公差为  $d$  ( $d \neq 0$ ) 的无穷等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 则下列命题正确的是 ( )
- A. 若  $d < 0$ , 则  $S_1$  是数列  $\{S_n\}$  的最大项
- B. 若数列  $\{S_n\}$  有最小项, 则  $d > 0$
- C. 若数列  $\{S_n\}$  是递减数列, 则对任意的:  $n \in \mathbb{N}^*$ , 均有  $S_n < 0$
- D. 若对任意的  $n \in \mathbb{N}^*$ , 均有  $S_n > 0$ , 则数列  $\{S_n\}$  是递增数列
12. 如图所示, 在棱长为 2 的正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中, 点  $M, N$  分别为棱  $B_1C_1, CD$  上的动点 (包含端点), 则下列说法正确的是 ( )



- A. 四面体  $A_1D_1MN$  的体积为定值
- B. 当  $M, N$  分别为棱  $B_1C_1, CD$  的中点时, 则在正方体中存在棱与平面  $A_1MN$  平行
- C. 直线  $MN$  与平面  $ABCD$  所成角的正切值的最小值为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- D. 当  $M, N$  分别为棱  $B_1C_1, CD$  的中点时, 则过  $A_1, M, N$  三点作正方体的截面, 所得截面为五边形

## 第 II 卷

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 若函数  $f(x) = x - a \ln x$  的图象在  $x=1$  处的切线斜率为 3, 则  $a =$  \_\_\_\_\_.
14. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 圆  $O$  与  $x$  轴的正半轴交于点  $A$ , 点  $B, C$  在圆  $O$  上, 若射线  $OB$  平分  $\angle AOC$ ,

$B\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ , 则点  $C$  的坐标为\_\_\_\_\_.

15. 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ,  $y=f(x)+e^x$  是偶函数,  $y=f(x)-3e^x$  是奇函数, 则  $f(x)$  的最小值为\_\_\_\_\_.

16. 已知菱形  $ABCD$  中, 对角线  $BD=2\sqrt{3}$ , 将  $\triangle ABD$  沿着  $BD$  折叠, 使得二面角  $A-BD-C$  为  $120^\circ$ ,  $AC=3\sqrt{3}$ , 则三棱锥  $A-BCD$  的外接球的表面积为\_\_\_\_\_.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 请在答题卡指定区域内作答. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知正项数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且满足  $2S_n = a_n^2 + a_n$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

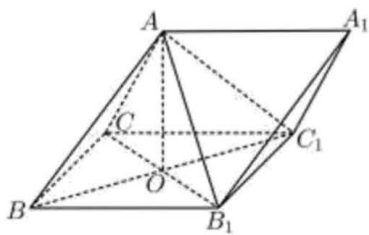
(2) 设  $b_n = \frac{4}{a_n a_{n+2}}$ , 数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 证明:  $T_n < 3$ .

18. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A$ 、 $B$ 、 $C$  所对的边分别为  $a$ 、 $b$ 、 $c$ , 已知  $\sqrt{3}b = a(\sqrt{3}\cos C - \sin C)$ .

(1) 求  $A$ ;

(2) 若  $a = 8$ ,  $\triangle ABC$  的内切圆半径为  $\sqrt{3}$ , 求  $\triangle ABC$  的周长.

19. 如图, 在三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $BC_1 \cap B_1C = O$ ,  $BC = BB_1 = 2$ ,  $AO = 1$ ,  $\angle B_1BC = 60^\circ$ , 且  $AO \perp$  平面  $BB_1C_1C$ .

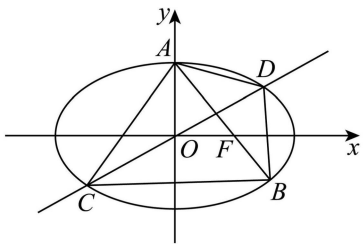


(1) 求证:  $AB \perp B_1C$ ;

(2) 求二面角  $A_1-B_1C_1-A$  的正弦值.

20. 如图, 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  上一点  $A(0, \sqrt{2})$ , 右焦点为  $F(c, 0)$ , 直线  $AF$  交椭圆于  $B$

点, 且满足  $|AF| = 2|FB|$ ,  $|AB| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

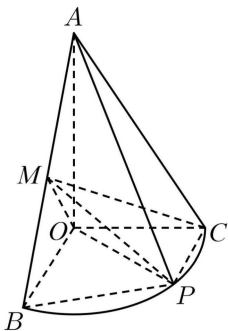


(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 若直线  $y = kx (k > 0)$  与椭圆相交于  $C, D$  两点, 求四边形  $ACBD$  面积的最大值.

21. 如图所示,  $A-BCP$  是圆锥的一部分 ( $A$  为圆锥的顶点),  $O$  是底面圆的圆心,  $\angle BOC = \frac{2\pi}{3}$ ,  $P$  是弧

$BC$  上一动点 (不与  $B, C$  重合), 满足  $\angle COP = \theta$ .  $M$  是  $AB$  的中点,  $OA = 2OB = 2$ .



(1) 若  $MP \parallel$  平面  $AOC$ , 求  $\sin \theta$  的值;

(2) 若四棱锥  $M-OCPB$  的体积大于  $\frac{1}{4}$ , 求三棱锥  $A-MPC$  体积的取值范围.

22. 混管病毒检测是应对单管病毒检测效率低下的问题, 出现的一个创新病毒检测策略, 混管检测结果为阴性, 则参与该混管检测的所有人均均为阴性, 混管检测结果为阳性, 则参与该混管检测的人中至少有一人为阳性. 假设一组样本有  $N$  个人, 每个人患病毒的概率相互独立且均为  $p (0 < p < 1)$ . 目前, 我们采用  $K$  人

混管病毒检测, 定义成本函数  $f(X) = \frac{N}{K} + KX$ , 这里  $X$  指该组样本  $N$  个人中患病毒的人数.

(1) 证明:  $E[f(X)] \geq 2\sqrt{p} \cdot N$ ;

(2) 若  $0 < p < 10^{-4}$ ,  $10 \leq K \leq 20$ . 证明: 某混管检测结果为阳性, 则参与该混管检测的人中大概率恰有一人为阳性.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。

