秘密★启用前

文科数学试卷

注意事项：

1. 答题前，考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号在答题卡上填写清楚.
2. 每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 在试题卷上作答无效.
3. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回. 满分150分，考试用时120分钟.

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知集合 $A=\{x\,|\,|x|\leqslant 1,\ x\in\mathbf{Z}\}$，则满足条件 $B\subsetneqq A$ 的集合 B 的个数为

A. 8　　B. 3
C. 4　　D. 7

2. 已知函数 $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}$，则下列说法正确的是

A. $f(x)$ 是偶函数
B. $f(x)$ 的图象恒在 x 轴上方
C. $f(x)$ 的图象经过原点
D. $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数

3. 已知如图1的程序框图，则当输出的 y 的值为8时，输入的 x 的值为

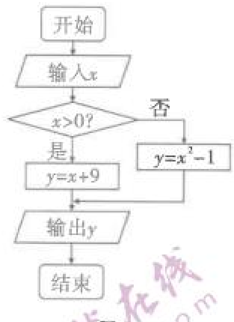


图1

A. -1
B. -3，3，-1
C. -1，-3
D. -3

4. 已知某个电台在每天中有5小时播放新闻，6小时播放广告，其余时间播放音乐，则某人随机在某一时刻打开该广播收听到音乐或新闻的概率为

A. $\frac{13}{24}$　　B. $\frac{5}{24}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{1}{4}$

5. 若 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 均为单位向量，且 $\vec{a}\perp\vec{b}$，$\vec{c}=\frac{1}{3}\vec{a}+k\vec{b}\,(k>0)$，则 k 的取值是

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

6. A，B，C 为 $\triangle ABC$ 的内角，则 $0<\tan A\tan B<1$ 是 $\triangle ABC$ 为钝角三角形的

A. 既不充分也不必要条件　　B. 充分不必要条件
C. 必要不充分条件　　D. 充要条件

7. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 的导函数图象如图 2，则关于以下函数值的大小关系，一定正确的是

A. $f(c)<f(d)<f(e)$

B. $f(a)>f(b)>f(0)$

C. $f(0)<f(c)<f(d)$

D. $f(b)<f(0)<f(c)$

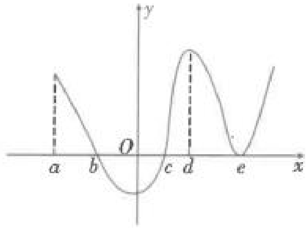


图 2

8. 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$，若其右焦点 F 关于直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 的对称点在双曲线 C 的一条渐近线上，则双曲线 C 的方程可能为

A. $\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{6}=1$

B. $\frac{x^2}{3}-y^2=1$

C. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$

D. $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{4}=1$

9. 九连环是我国民间的一种益智玩具，它蕴含着丰富的数学奥秘．假设从套环与套框完全分离的状态出发，需经过 a_n 步演变，出现只穿有第 n 环的状态，则 $a_{n+1}=2a_n+1$，且 $a_1=1$．则从套环与套框完全分离的状态到套环均在套框上的状态，总共需要的演变步数为 $a_8+1+a_6+1+a_4+1+a_2+1+1=$

A. 340

B. 345

C. 344

D. 341

10. 如图 3，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M 为棱 BC 的中点，用平行于体对角线 BD_1 且过点 A，M 的平面去截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，得到的截面的形状是

A. 五边形

B. 平行四边形

C. 梯形

D. 以上都不对

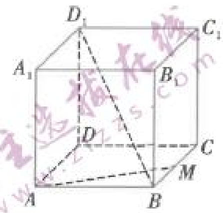


图 3

11. 已知复数 z 满足 $|z|=1$，则 $|z+1-2i|$ 的最小值为

A. 2

B. $\sqrt{5}-1$

C. $\sqrt{5}$

D. 3

12. 已知函数 $f(x)=\cos x$，若 x_1，$x_2\in\left(-\frac{\pi}{4},\ 0\right)\cup\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right)$ 时，有 $\frac{f(x_1)}{x_2^2}<\frac{f(x_2)}{x_1^2}$，则

A. $x_1^2<x_2^2$

B. $x_1>x_2$

C. $x_1<x_2$

D. $x_1^2>x_2^2$

二、**填空题**（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 函数 $f(x)=\ln|x|$ 的零点个数为__________.

14. 已知实数 x，y 满足条件 $\begin{cases}x+2y+4\geq 0,\\2x-3y+1\geq 0,\\4x+y-5\leq 0,\end{cases}$ 则 $z=\dfrac{y}{x-3}$ 的最小值为__________.

15. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{8}=1$，点 $A(a,\ 2a)$，$B(a-2,\ 2a-4)$，若线段 AB 与椭圆 C 有公共点，则实数 a 的取值范围是__________.

16. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，$\cos A=\dfrac{4}{5}$，若点 P 为 $\triangle ABC$ 的外心，且 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则 $x+y$ 的最大值为__________.

三、**解答题**（共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 12 分）

如图 4 为函数 $f(x)=A\sin\omega x\ (A>0,\ \omega>0)$ 在一个周期内的图象，其中点 M 是图象的最高点，B，C 为图象与 x 轴的交点. 且 $OM\perp MB$，点 B 为 $(4,\ 0)$.

（1）求函数 $f(x)$ 的表达式；

（2）若将 $y=f(x)$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），再将图象向左平移 1 个单位，得到函数 $y=g(x)$ 的图象，求函数 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的单调减区间.

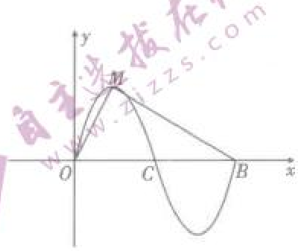
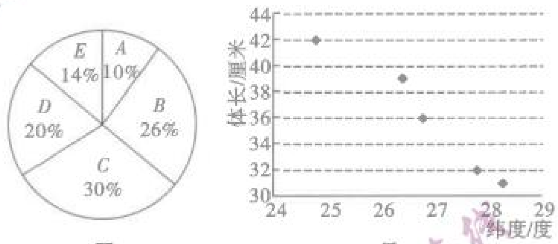


图 4

18.（本小题满分 12 分）

2021 年《联合国气候变化框架公约》第十五次缔约方会议（COP15）将在云南昆明举行，大会的主题为“生态文明：共建地球生物共同体”. 大绒鼠是中国的特有濒危物种，仅分布在湖北、四川、云南等地. 某校同学为探究大绒鼠的形态学指标与纬度、海拔和年平均温度的关系，从德钦、香格里拉、丽江、剑川、哀牢山五个采样点收集了 50 只大绒鼠标本.



甲　　乙

图 5

（1）将五个采样地分别记作 A，B，C，D，E，各个采样地所含标本数量占总标本数量的百分比如图 5 甲所示. 若从五个采样地中随机选择两个来进行研究，求这两个采样地所含标本数量至少达到总标本数量一半的概率；

（2）为研究大绒鼠体长与纬度的变化关系，收集数据后绘制了如图乙所示的散点图. 由散点图可看出体长 y 与纬度 x 存在线性相关关系，请根据下列统计量的值求出 y 与 x 的线性回归方程，并以此估计纬度为 30 度时，大绒鼠的平均体长.

$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x}\cdot\bar{y}$	$\bar{x}^2$	$\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i$	$\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2$
27	36	972	729	5008.5	3600

参考公式：回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$ 中斜率和截距最小二乘估计公式分别为 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$.

19.（本小题满分 12 分）

如图 6，三棱锥 $P-ABD$，$Q-BCD$ 均为底面边长为 $2\sqrt{3}$、侧棱长为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 的正棱锥，且四边形 $ABCD$ 是边长为 $2\sqrt{3}$ 的菱形（点 P，Q 在平面 $ABCD$ 的同侧），AC，BD 交于点 O.

（1）证明：平面 $PQO\perp$ 平面 $ABCD$；

（2）求点 P 到平面 QBC 的距离.

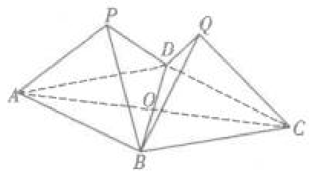


图 6

20.（本小题满分 12 分）

已知曲线 C 是顶点为坐标原点 O，且开口向右的抛物线，曲线 C 上一点 $A(x_0, 2)$ 到准线的距离为 $\frac{5}{2}$.

（1）求抛物线 C 的方程与点 A 的坐标；

（2）若焦点到准线的距离小于 4，MN，PQ 是过点 $(1, 0)$ 且互相垂直的 C 的弦，求四边形 $MPNQ$ 的面积的最小值.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\ln x$.

（1）证明：当 $x>2$ 时，$-\frac{2}{x}+\frac{5}{3}<f(x)<\frac{x}{2}$ 恒成立；

（2）设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=f\left(2+\frac{2}{n^2+2n}\right)$. 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，求证：$\frac{2}{3}n+\frac{1}{6}<S_n<n+\frac{3}{4}$.

（参考数据：$e=2.71828\cdots$，$\sqrt{2}=1.41421\cdots$）

请考生在第 22、23 两题中任选一题作答，并用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目的题号涂黑. 注意所做题目的题号必须与所涂题目的题号一致，在答题卡选答区域指定位置答题. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22.（本小题满分 10 分）【选修 4-4：坐标系与参数方程】

在直角坐标系 xOy 中，已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\theta+1,\\ y=\sin\theta,\end{cases}$（$\theta$ 为参数）. 若以原点 O 为极点，以 x 轴的非负半轴为极轴且取相同的单位长度建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=1$.

（1）求出曲线 C 的极坐标方程；

（2）若射线 $\theta=\theta_1$ 与曲线 C、直线 l 分别交于 A，B 两点，当 $\theta_1\in\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$ 时，求 $|OA|\cdot|OB|$ 的取值范围.

23.（本小题满分 10 分）【选修 4-5：不等式选讲】

已知 $a+b+c=3$.

（1）若 $c=1$，且 $f(x)=|x-a|+|x-2b|\geqslant 2$ 恒成立，求 a 的取值范围；

（2）证明：$ab+bc+ca\leqslant 3$.

西南名校联盟高考适应性月考卷 12 月考

文科数学参考答案

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	B	D	C	A	B	A	C	D	C	B	A

【解析】

1．因为 $A=\{-1,\ 0,\ 1\}$，所以满足条件 B Ü A 的集合 B 的个数为 $2^3-1=7$，故选 D.

2．$f(x)=x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，$f(x)$ 的定义域为 $(0,\ +\infty)$，因此 A，C，D 错误；又 $f(x)>0$，所以 $f(x)$ 的图象恒在 x 轴上方，B 正确，故选 B.

3．该程序框图对应的分段函数 $y=\begin{cases}x+9,\ x>0,\\ x^2-1,\ x\leqslant 0,\end{cases}$ 当 $y=8$ 时，$\begin{cases}x>0,\\ x+9=8\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\leqslant 0,\\ x^2-1=8,\end{cases}$ 解得 $x=-3$，故选 D.

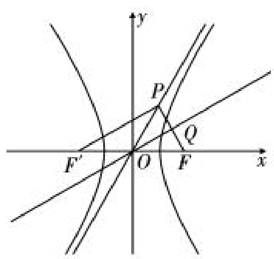
4．试验发生包含的事件总的时间长度为 24 小时，其中播放音乐时间为 $24-5-6=13$（小时），所以某人随机在某一时刻打开该广播收听到音乐或新闻的概率为 $\dfrac{13+5}{24}=\dfrac{3}{4}$，故选 C.

5．因为 $\vec{c}$ 为单位向量，所以 $\vec{c}^{\,2}=\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+k\vec{b}\right)^2=\dfrac{1}{9}\vec{a}^{\,2}+\dfrac{2}{3}k\vec{a}\cdot\vec{b}+k^2\vec{b}^{\,2}=\dfrac{1}{9}+k^2=1$，又 $k>0$，所以 $k=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，故选 A.

6．因为当 $0<\tan A\tan B<1$ 时，$\tan A>0$，$\tan B>0$，所以 $\tan C=\tan[\pi-(A+B)]=-\tan(A+B)=-\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}<0$，则 C 为钝角；但当 A 为钝角时，$\tan A\tan B<0$，故选 B.

7．由 $f(x)$ 的导函数图象可知，$f(x)$ 在 $(a,\ b)$，$(c,\ e)$ 上单调递增，在 $(b,\ c)$ 上单调递减，所以 $f(a)<f(b)$，B 错误；$f(b)>f(0)>f(c)$，C，D 错误；$f(c)<f(d)<f(e)$，A 正确，故选 A.

8．如图 1，设焦点 F 关于直线 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ 的对称点为 P，C 的左焦点为 F'，PF 与直线 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ 的交点为 Q，则由 Q，O 分别为 PF，FF' 的中点，可得 $OQ/\!/PF'$，所以 $\angle F'PF=\angle OQF=90^\circ$，则 $OP=OF$，又



$\tan\angle QOF=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\angle QOF=30^\circ$，则 $\angle POF=60^\circ$，又因为 P 在渐近线上，所以 $\tan\angle POF=\sqrt{3}=\frac{b}{a}$，即 $b=\sqrt{3}a$．经检验，只有 C 选项满足条件，故选 C．

9．由 $a_{n+1}=2a_n+1$，可得 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$，令 $b_n=a_n+1$，则 $\{b_n\}$ 为以 a_1+1 为首项，2 为公比的等比数列，所以 $b_n=a_n+1=2^n$，则 $a_8+1+a_6+1+a_4+1+a_2+1+1=2^8+2^6+2^4+2^2+1=341$，故选 D．

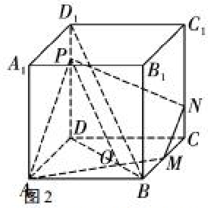


图 2

10．如图 2，设截面为 α，设 $BD\cap AM=O$，P 为 DD_1 的靠近于 D_1 的三等分点，N 为 CC_1 的靠近于 C 的三等分点，由 $BD_1/\!/\alpha$ 可得平面 BDD_1 与 α 的交线平行于 BD_1，所以 $\alpha\cap$ 平面 $DBD_1=OP$，又平面 α 与两平行平面 AA_1D_1D，BB_1C_1C 的交线应互相平行，$\therefore\alpha\cap$ 平面 $BB_1C_1C=MN$，由 $MN/\!/AP$ 且 $MN\neq AP$ 可得截面 $AMNP$ 为梯形，故选 C．

11．因为 $|z|=|x+yi|=\sqrt{x^2+y^2}=1$，所以 $x^2+y^2=1$，即 z 在复平面内表示圆 O：$x^2+y^2=1$ 上的点；又 $|z+1-2i|=|(x+1)+(y-2)i|=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}$，所以 $|z+1-2i|$ 表示圆 O 上的动点到定点 $A(-1,2)$ 的距离，所以 $|z+1-2i|_{\min}$ 为 $|OA|-r=\sqrt{5}-1$，故选 B．

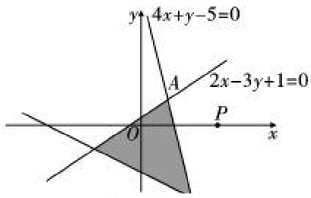
12．因为 $x_1x_2\neq0$，所以 $\frac{f(x_1)}{x_2^2}<\frac{f(x_2)}{x_1^2}\Leftrightarrow x_1^2f(x_1)<x_2^2f(x_2)$，令 $g(x)=x^2f(x)=x^2\cos x$，则 $g(x)$ 为偶函数.当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 时，$g'(x)=2x\cos x-x^2\sin x=x(2\cos x-x\sin x)$，令 $h(x)=2\cos x-x\sin x$，则 $h'(x)=-3\sin x-x\cos x$，则 $h'(x)<0$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上恒成立，所以 $h(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递减，又 $h\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(2-\frac{\pi}{4}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}>0$，所以 $g'(x)>0$ 在 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上恒成立，所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增．再结合 $g(x)$ 为偶函数，从而当 x_1，$x_2\in\left(-\frac{\pi}{4},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 且 $g(x_1)<g(x_2)$ 时必有 $|x_1|<|x_2|$，即 $x_1^2<x_2^2$，故选 A．

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	2	$-\frac{1}{2}$	$-1\leqslant a\leqslant3$	$\frac{5}{9}$

【解析】

13．因为 $\ln|x|=0$，当且仅当 $x=\pm1$，所以 $f(x)=\ln|x|$ 有两个零点．



14．如图 3，作出可行域，则 $k=\dfrac{y}{x-3}$ 表示可行域内的动点 (x, y) 与定点 $P(3, 0)$ 连线的斜率，所以当且仅当动点取点 $A(1, 1)$ 时，$z_{\min}=-\dfrac{1}{2}$．

15．由于 A，B 均在直线 l：$y=2x$ 上，又 l 与椭圆 C 的交点分别为 $M(1, 2)$，$N(-1, -2)$，且 $|MN|=|AB|=2\sqrt{5}$．所以只需点 A 或点 B 在线段 MN 上，均能保证线段 AB 与椭圆有公共点，即 $-1\leqslant a\leqslant 1$ 或 $-1\leqslant a-2\leqslant 1$，所以 $-1\leqslant a\leqslant 3$．

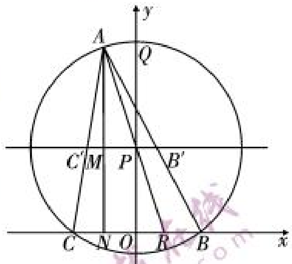


图 4

16．方法一：不妨设△ABC 的外接圆半径为 5．如图 4，取点 $B(3, 0)$，$C(-3, 0)$，$Q(0, 9)$，并作△BQC 的外接圆⊙P，则点 P 为 $(0, 4)$，则此时 $\angle BQC=\angle OPC$ 且 $\cos\angle OPC=\dfrac{4}{5}$，所以 $\cos A=\dfrac{4}{5}$ 当且仅当点 A 是优弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上除 B，C 以外的点．当△ABC 为锐角三角形时，过点 P 作 $B'C'\parallel BC$ 其中 $B'C'$ 分别交 AB，AC 于点 B'，C'，AP 的延长线交 BC 于点 R．设 $\overrightarrow{AP}=x'\overrightarrow{AB'}+y'\overrightarrow{AC'}$，则由 B'，P，C' 共线，可得 $x'+y'=1$．设 $\dfrac{|AB'|}{|AB|}=\dfrac{|AC'|}{|AC|}=\dfrac{|AP|}{|AR|}=k$，则 $\overrightarrow{AP}=x'\overrightarrow{AB'}+y'\overrightarrow{AC'}=x'k\overrightarrow{AB}+y'k\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，所以 $x=x'k$，$y=y'k$，$x+y=k(x'+y')=k$，所以为使 k 取最大值，只需使 $\dfrac{|AP|}{|AR|}$ 最大．过 A 作 x 轴的垂线交 $B'C'$，BC 分别于点 M，N，则 $\dfrac{|AP|}{|AR|}=\dfrac{|AM|}{|AN|}$，又 $\dfrac{|AM|}{|AN|}=\dfrac{|AM|}{|AM|+|MN|}=\dfrac{1}{1+\dfrac{|MN|}{|AM|}}$，所以当 $|AM|=r=5$ 时，$\dfrac{|AP|}{|AR|}_{\max}=\dfrac{1}{1+\dfrac{4}{5}}=\dfrac{5}{9}$．

方法二：作出△ABC 的外接圆，则由 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ 可得 $\overrightarrow{AP}=x(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB})+y(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PC})$，所以 $(1-x-y)\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{PB}+y\overrightarrow{PC}(*)$，则 $1-x-y>0\Rightarrow x+y<1$，设外接圆的半径为 R，则对 $(*)$ 两边平方可得 $(1-x-y)^2R^2=x^2R^2+2xyR^2\cos\angle BPC+y^2R^2$．又 $\cos\angle BPC=2\cos^2A-1=\dfrac{7}{25}$，所以上式整理可得 $\dfrac{36}{25}xy=2x+2y-1$．因为 $x>0$，$y>0$，所以由均值不等式可得 $xy\leqslant\dfrac{(x+y)^2}{4}$．令 $t=x+y$，则 $9t^2-50t+25\geqslant 0$，解得 $t\geqslant 5$（舍去）或 $t\leqslant\dfrac{5}{9}$，其中“＝”成立当且仅当 $x=y$，所以 $(x+y)_{\max}=\dfrac{5}{9}$．

三、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 12 分）

解：（1）∵ $OM\perp MB$，又 C 为 OB 的中点，

$\therefore |MC|=|OC|=\dfrac{|OB|}{2}=2$．

又$|OM|=|MC|$，$\therefore\triangle OMC$为边长为2的等边三角形，

$\therefore M(1,\sqrt{3})$，$A=\sqrt{3}$．

又$\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$，

$\therefore f(x)=\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{2}x$． ……………………………………………………（6分）

（2）$g(x)=\sqrt{3}\sin\left[\dfrac{\pi}{4}(x+1)\right]=\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，

令$\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\dfrac{\pi}{4}x+\dfrac{\pi}{4}\leqslant\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

得$1+8k\leqslant x\leqslant 5+8k(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore g(x)$在$\mathbf{R}$上的单调减区间为$[1+8k,\ 5+8k](k\in\mathbf{Z})$．

……………………………………………………（12分）

18．（本小题满分12分）

解：（1）从A，B，C，D，E中选择2个采样地，

所有选择方式为AB，AC，AD，AE，BC，BD，BE，CD，CE，DE（共10种），

其中BC，CD可满足标本数量至少达到总标本数量的一半．

令P为两个采样地所含标本数量至少达到总标本数量一半的概率，则$P=\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$．

……………………………………………………（6分）

（2）由表格数据可得，$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i-5\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2-5\bar{x}^2}=\dfrac{5008.5-5\times972}{3600-5\times27^2}=-\dfrac{29.7}{9}=-3.3$，

$\therefore\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=36+3.3\times27=125.1$，

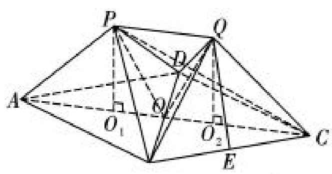
$\therefore y$与x的线性回归方程是$\hat{y}=-3.3x+125.1$．

$\therefore$当$x=30$时，$\hat{y}=26.1$，即纬度为30度时，大绒鼠的平均体长为26.1厘米．

……………………………………………………（12分）

19．（本小题满分12分）

（1）证明：如图5，连接PO，OQ，PQ，



$\because PB=PD$，O为BD的中点，

$\therefore PO\perp DB$．

同理，$QO\perp DB$，

又 $PO\cap OQ=O$，PO，$OQ\subset$ 平面 POQ，

$\therefore BD\perp$ 平面 POQ.

又 $BD\subset$ 平面 $ABCD$，

$\therefore$ 平面 $POQ\perp$ 平面 $ABCD$.　　…………………………………………（5 分）

（2）解：如图，分别过 P，Q 作平面 $ABCD$ 的垂线，垂足分别为 O_1，O_2，

则 O_1，O_2 在 AC 上，且 O_1，O_2 分别为 AO，OC 的三等分点，

且 $PO_1 \underline{\parallel} QO_2$，$PO_1\perp O_1O_2$，

$\therefore$ 四边形 PO_1O_2Q 为矩形，

$\therefore PQ\parallel AC$.

且 $PQ=O_1O_2=2\times\frac{1}{3}AO=\frac{2}{3}AO=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times2\sqrt{3}=2$，

$\therefore PO_1=\sqrt{AP^2-AO_1^2}=\sqrt{AP^2-O_1O_2^2}=\sqrt{\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2-4}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

取 BC 的中点 E，则 $QE=\sqrt{QB^2-BE^2}=\sqrt{\frac{16}{3}-3}=\frac{\sqrt{21}}{3}$，

又由（1），平面 $POQ\perp$ 平面 $ABCD$，

而平面 $POQ\cap$ 平面 $ABCD=AC$，$BO\perp AC$，

$\therefore BO\perp$ 平面 PQC.

设点 P 到平面 QBC 的距离为 d，

则由 $V_{P-QBC}=V_{B-PQC}$，可得 $\frac{1}{3}S_{\triangle QBC}\cdot d=\frac{1}{3}S_{\triangle PQC}\cdot BO$，

即 $\frac{1}{3}QE\cdot BE\cdot d=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}PQ\cdot PO_1\cdot BO$，

即 $\frac{\sqrt{21}}{3}\times\sqrt{3}d=\frac{1}{2}\times2\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}$，

解得 $d=\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

…………………………………………………………（12 分）

20．（本小题满分 12 分）

解：（1）设抛物线的方程为 $y^2=2px(p>0)$，

$\because$ 点 A 在抛物线上，

$\therefore 4=2px_0\Rightarrow x_0=\frac{2}{p}$，

$\therefore$ 点 A 到准线的距离为 $x_0+\frac{p}{2}=\frac{2}{p}+\frac{p}{2}=\frac{5}{2}\Rightarrow p^2-5p+4=0$

解得 $p=4$ 或 1，

$\therefore$ 当 $p=4$ 时，C：$y^2=8x$，$A\left(\frac{1}{2},\ 2\right)$；

当 $p=1$ 时，C：$y^2=2x$，$A(2,\ 2)$.

……………………………………………………（4 分）

（2）$\because p<4$，$\therefore C$：$y^2=2x$，

设 MN：$x=my+1$，代入抛物线方程可得 $y^2-2my-2=0$，

设 $M(x_1,\ y_1)$，$N(x_2,\ y_2)$，

则 $\begin{cases} y_1+y_2=2m, \\ y_1y_2=-2, \end{cases}$

$\therefore |MN|=\sqrt{1+m^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=2\sqrt{(1+m^2)(m^2+2)}$.

又 $\because PQ\perp MN$，$\therefore PQ$：$x=-\frac{1}{m}y+1$，

$\therefore |PQ|=2\sqrt{\left(1+\frac{1}{m^2}\right)\left(\frac{1}{m^2}+2\right)}$，

$\therefore S_{四边形MNPQ}=\frac{1}{2}|MN||PQ|=2\sqrt{(1+m^2)(m^2+2)\left(1+\frac{1}{m^2}\right)\left(\frac{1}{m^2}+2\right)}$

$=2\sqrt{(1+m^2)\left(1+\frac{1}{m^2}\right)}\cdot\sqrt{(m^2+2)\left(\frac{1}{m^2}+2\right)}$

$=2\sqrt{2+m^2+\frac{1}{m^2}}\cdot\sqrt{5+2m^2+\frac{2}{m^2}}$.

$\because m^2+\frac{1}{m^2}\geqslant 2$，其中“=”成立当且仅当 $m^2=1$，

$\therefore S_{四边形MNPQ}\geqslant 2\sqrt{4}\times\sqrt{9}=12$，

$\therefore$ 当 $m=\pm1$ 时，$S_{四边形MNPQ}$ 取得最小值为 12.

……………………………………………………（12 分）

21．（本小题满分 12 分）

证明：（1）令 $g(x)=f(x)+\frac{2}{x}-\frac{5}{3}=\ln x+\frac{2}{x}-\frac{5}{3}$，

则 $g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}=\frac{x-2}{x^2}$，

$\therefore$ 当 $x>2$ 时，$g'(x)>0$，

$\therefore g(x)$ 在 $(2,\ +\infty)$ 上单调递增.

又 $g(2)=\ln 2-\frac{2}{3}$，

而 $e^{\ln 2}-e^{\frac{2}{3}}=2-e^{\frac{2}{3}}$，$2^3=8$，$(e^{\frac{2}{3}})^3=e^2$，$\sqrt{8}=2\sqrt{2}\approx 2.83>e$，

$\therefore g(2)=\ln 2-\frac{2}{3}>0$，

$\therefore -\frac{2}{x}+\frac{5}{3}<f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上恒成立.

令 $h(x)=f(x)-\frac{x}{2}=\ln x-\frac{x}{2}$，则 $h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}=\frac{2-x}{2x}$，

$\therefore$ 当 $x>2$ 时，$h'(x)<0$，

$\therefore h(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递减.

又 $h(2)=\ln 2-1<0$，

$\therefore f(x)<\frac{x}{2}$ 在 $(2,+\infty)$ 上恒成立.

综上，当 $x>2$ 时，$-\frac{2}{x}+\frac{5}{3}<f(x)<\frac{x}{2}$ 恒成立.

……………………………………………（6 分）

（2）$\because \ln\left(2+\frac{2}{n^2+2n}\right)$，而 $2+\frac{2}{n^2+2n}>2$，（*）

所以令（*）中不等式的 $x=2+\frac{2}{n^2+2n}=\frac{2n^2+4n+2}{n^2+2n}$，

则有 $-\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}+\frac{5}{3}<a_n<1+\frac{1}{n^2+2n}$，

则一方面，$a_n>-\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}+\frac{5}{3}=\frac{5}{3}-\frac{n^2+2n+1-1}{n^2+2n+1}=\frac{2}{3}+\frac{1}{(n+1)^2}>$

$\frac{2}{3}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{2}{3}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$，

$\therefore S_n>\frac{2}{3}n+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{2}{3}n+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}>\frac{2}{3}n+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}n+\frac{1}{6}$.

另一方面，$a_n<1+\frac{1}{n(n+2)}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$，

$\therefore S_n<n+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=n+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=n+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)<n+\frac{3}{4}$，

综上，有 $\frac{2}{3}n+\frac{1}{6}<S_n<n+\frac{3}{4}$.

……………………………………………… （12 分）

22. （本小题满分 10 分）【选修 4−4：坐标系与参数方程】

解：（1）由条件可得 $x=\cos\alpha+1$，$y=\sin\alpha$，

又 $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$，∴ $(x-1)^2+y^2=1$，

即 $x^2+y^2-2x=0$ 为曲线 C 的普通方程，

将 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\\ x^2+y^2=\rho^2,\end{cases}$ 代入 C 的普通方程，可得 $\rho^2-2\rho\cos\theta=0$，

即 $\rho=2\cos\theta$ 为曲线 C 的极坐标方程. ……………………………… （5 分）

（2）将 $\theta=\theta_1$ 分别代入曲线 C 与直线 l 的极坐标方程，

可得 $|OA|=\rho_A=2\cos\theta_1$，

$|OB|=\rho_B=\dfrac{1}{2\sin\left(\theta_1+\dfrac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{2}(\sin\theta_1+\cos\theta_1)}$，

∴ $|OA|\cdot|OB|=\dfrac{2\cos\theta_1}{\sqrt{2}(\sin\theta_1+\cos\theta_1)}=\sqrt{2}\,\dfrac{1}{\tan\theta_1+1}$.

又 $\theta_1\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}\right)$，

∴ $\tan\theta_1\in(1,\sqrt{3})$，

∴ $|OA|\cdot|OB|\in\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

……………………………………………………………… （10 分）

23. （本小题满分 10 分）【选修 4−5：不等式选讲】

（1）解：若 $c=1$，则 $a+b=2$，$b=2-a$，

∴ $f(x)=|x-a|+|x-2b|=|x-a|+|x-4+2a|$，

由绝对值三角不等式可得，$f(x)\geqslant|(x-a)-(x-4+2a)|=|4-3a|$，

其中“=”成立当且仅当 $(x-a)(x-4+2a)\leqslant0$，

∴ $f(x)_{\min}=|4-3a|$，

∴ $f(x)=|x-a|+|x-2b|\geqslant2\Leftrightarrow|4-3a|\geqslant2$，

∴ $4-3a\geqslant2$ 或 $4-3a\leqslant-2$，即 $a\leqslant\dfrac{2}{3}$ 或 $a\geqslant2$.

……………………………………………… （5 分）

（2）证明：∵ $a^2+b^2\geqslant2ab$，

$b^2+c^2\geqslant2bc$

$c^2+a^2 \geqslant 2ca$，

$\therefore 2(a^2+b^2+c^2) \geqslant 2(ab+bc+ca)$，

$\therefore a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$，

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \geqslant 3(ab+bc+ca)$，

$\therefore ab+bc+ca \leqslant \dfrac{(a+b+c)^2}{3}=3$，

其中“=”当且仅当 $a=b=c=1$．

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》