学校________ 班级________ 姓名________ 考号________

密 封 内 不 要 答 题

2023届新高考高三核心模拟卷(中)

数学(二)

注意事项:

1. 本卷满分150分,考试时间120分钟。答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在试题卷和答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答:用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后,请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 若$(1+2ai)i=1-bi$,其中$a,b\in\mathbf{R}$,则$|1+a+bi|=$

A. $\frac{\sqrt{13}}{2}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　D. $\sqrt{10}$

2. 设集合$A=\{x|x<2$或$x\geqslant 4\}$,$B=\{x|a\leqslant x\leqslant a+1\}$,若$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=\varnothing$,则$a$的取值范围是

A. $a\leqslant 1$或$a>4$　　B. $a<1$或$a\geqslant 4$

C. $a<1$　　D. $a>4$

3. 已知函数$y=\log_a(3x-2)+2(a>0$且$a\neq 1)$的图象过定点A,若抛物线$y^2=2px$也过点A,则抛物线的准线方程为

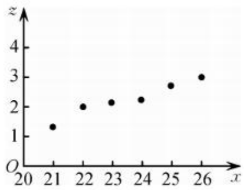
A. $x=-2$　　B. $x=-1$

C. $x=-\frac{9}{2}$　　D. $x=-\frac{9}{4}$

4. 若两个向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的夹角是$\frac{2\pi}{3}$,$\boldsymbol{a}$是单位向量,$|\boldsymbol{b}|=2$,$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,则向量$\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

5. 一种高产新品种水稻单株穗粒数y和土壤锌含量x有关,现整理并收集了6组试验数据,y(单位:粒)与土壤锌含量x(单位:mg/m^3)得到样本数据$(x_i,y_i)(i=1,2,3,4,5,6)$,令$z_i=\ln y_i$,并将(x_i,z_i)绘制成如图所示的散点图.若用方程$y=ae^{bx}$对y与x的关系进行拟合,则



A. $a>1,b>0$　　B. $a>1,b<0$

C. $0<a<1,b>0$　　D. $0<a<1,b<0$

6. $\left(x-\frac{2}{\sqrt{x}}-1\right)^6$展开式中常数项为

A. -479　　B. -239　　C. 1　　D. 481

7. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=\ln(1+x^2)+x$，则不等式 $f(2x+1)>1+\ln 2$ 的解集为

A. $\{x|x>0\}$　　B. $\{x|x<0\}$

C. $\{x|x>1\}$　　D. $\{x|x<1\}$

8. 在三棱锥 $A-BCD$ 中，$\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 都是边长为 $2\sqrt{2}$ 的正三角形，当三棱锥 $A-BCD$ 的表面积最大时，其内切球的半径是

A. $4-2\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{2}-\sqrt{6}$　　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 设 $a>1,b>1$，且 $ab-(a+b)=1$，那么

A. $a+b$ 有最小值 $2\sqrt{2}+2$　　B. $2a+b$ 有最小值 7

C. ab 有最小值 $3+2\sqrt{2}$　　D. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 有最小值 $3-2\sqrt{2}$

10. 已知函数 $f(x)=2\sin^2 x-3\sin|x|+1$，则

A. $f(x)$ 是偶函数　　B. $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$ 上单调递增

C. $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上有 4 个零点　　D. $f(x)$ 的值域是 $[0,6]$

11. 已知曲线 C 的方程为 $x^2+y^2-2x+4y-1=0$，曲线 C 关于点 $\left(\frac{1}{2},m\right)$ 的对称曲线为 C'，若以曲线 C' 与两坐标轴的交点为顶点的四边形面积为 $4\sqrt{3}$，则 m 的值可能为

A. -1　　B. 1　　C. -2　　D. 0

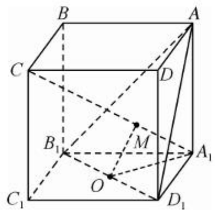
12. 如图所示，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=A_1B_1=2$，$AD=1$，O 是 B_1D_1 的中点，直线 A_1C 交平面 AB_1D_1 于点 M，则

A. A,M,O 三点共线

B. A_1M 的长度为 1

C. 直线 AO 与平面 BCC_1B_1 所成角的正切值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$

D. $\triangle A_1MO$ 的面积为 $\dfrac{\sqrt{5}}{6}$



三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知双曲线 $C:\dfrac{y^2}{1-a^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1(0<a<1)$ 的一个焦点到直线 $y=ax$ 的距离为 $\dfrac{4}{5}$，则 C 的离心率为________.

14. 已知 α 为锐角，且 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$，则 $\cos\alpha=$________.

15. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q(q>0)$，前 n 项和为 S_n，且满足 $a_1=q$，$a_5=a_1+S_4$. 若对一切正整数 n，不等式 $13-2n-2m+ma_n>mS_n$ 恒成立，则实数 m 的取值范围为________.

16. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，$BC=4$，$\sin B+\sin C=2\sin A$，则中线 AD 的取值范围是________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $a_n+S_n=1$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

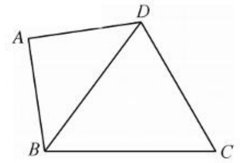
(2)若数列$\{b_n\}$满足 $b_n=12+\log_2 a_n$，设 $T_n=|b_1|+|b_2|+\cdots+|b_n|$，求 T_n.

18.（本小题满分 12 分）

如图，在四边形 $ABCD$ 中，已知 $AB=AD=4$，$BC=6$.

(1)若 $A=\frac{2\pi}{3}$，$C=\frac{\pi}{3}$，求 $\cos\angle BDC$ 的值；

(2)若 $CD=2$，四边形 $ABCD$ 的面积为 4，求 $\cos(A+C)$的值.

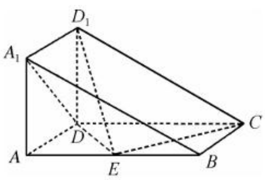


19.（本小题满分 12 分）

如图所示，正方形 AA_1D_1D 与矩形 $ABCD$ 所在平面互相垂直，$AB=2AD=2$，E 为线段 AB 上一点.

(1)求证：$D_1E\perp A_1D$；

(2)在线段 AB 上是否存在点 E，使二面角 D_1-EC-D 的大小为$\frac{\pi}{6}$？若存在，求出 AE 的长；若不存在，说明理由.



20.(本小题满分12分)

现有甲、乙两名运动员争夺某项比赛的奖金,规定两名运动员谁先赢$k(k>1,k\in\mathbf{N}^*)$局,谁便赢得全部奖金a元.假设每局甲赢的概率为$p(0<p<1)$,乙赢的概率为$1-p$,且每场比赛相互独立.在甲赢了$m(m<k)$局,乙赢了$n(n<k)$局时,比赛意外终止,奖金如何分配才合理?评委会给出的方案是:甲、乙按照比赛再继续进行下去各自赢得全部奖金的概率之比$P_甲:P_乙$分配奖金.

(1)若$k=3,m=2,n=1,p=\frac{3}{4}$,求$P_甲:P_乙$;

(2)记事件A为"比赛继续进行下去乙赢得全部奖金",试求当$k=4,m=2,n=2$时比赛继续进行下去甲赢得全部奖金的概率$f(p)$,并判断当$\frac{6}{7}\leqslant p<1$时,事件A是否为小概率事件,并说明理由.规定:若随机事件发生的概率小于0.06,则称该随机事件为小概率事件.

21.(本小题满分12分)

已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点$\left(1,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$,直线$l:y=x+t$与$C$交于$M,N$两点,且线段$MN$的中点为$H$,$O$为坐标原点,直线$OH$的斜率为$-\frac{1}{2}$.

(1)求C的标准方程;

(2)已知直线$y=kx+2$与C有两个不同的交点A,B,P为x轴上一点.是否存在实数k,使得$\triangle PAB$是以点P为直角顶点的等腰直角三角形?若存在,求出k的值及点P的坐标;若不存在,请说明理由.

22.(本小题满分12分)

已知函数$f(x)=ax^2+(a-2)x-\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论$f(x)$的单调性;

(2)若$f(x)$有两个零点x_1,x_2,证明:$x_1+x_2>\frac{2}{a}$.

密 封 线 内 不 要 答 题

2023 届新高考高三核心模拟卷(中)

数学(二)参考答案

1. C $\because(1+2ai)i=-2a+i=1-bi$,$\therefore a=-\frac{1}{2}$,$b=-1$,$\therefore|1+a+bi|=\left|\frac{1}{2}-i\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}$. 故选 C.

2. B 由集合 $A=\{x|x<2$ 或 $x\geqslant4\}$,得 $\complement_{\mathbf{R}}A=\{x|2\leqslant x<4\}$,又集合 $B=\{x|a\leqslant x\leqslant a+1\}$且$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=\varnothing$,则 $a+1<2$ 或 $a\geqslant4$,即 $a<1$ 或 $a\geqslant4$. 故选 B.

3. B 因为函数图象过定点 $A(1,2)$,将它代入抛物线方程得 $p=2$,所以其准线方程为 $x=-1$. 故选 B.

4. D 由题意 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\frac{2\pi}{3}=1\times2\times\cos\frac{2\pi}{3}=-1$,又由 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,所以 $|\boldsymbol{c}|=\sqrt{(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{4\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}$ $=\sqrt{4+4+4}=2\sqrt{3}$,所以 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=-2-4=-6$,设向量 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,其中 $\theta\in[0,\pi]$,则 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{c}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{-6}{2\sqrt{3}\times2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,可得 $\theta=\frac{5\pi}{6}$. 故选 D.

5. A 因为 $y=ae^{bx}$,令 $z=\ln y$,则 z 与 x 的回归方程为 $z=bx+\ln a$. 根据散点图可知 z 与 x 正相关,所以 $b>0$,回归直线的纵截距大于 0,即 $\ln a>0$,所以 $a>1$. 故选 A.

6. C 展开式中常数项为:$(-1)^6+C_6^1\cdot C_5^2(-2)^2(-1)^3+C_6^2\cdot C_4^4(-2)^4=1-240+240=1$. 故选 C.

7. A 当 $x>0$ 时,$f(x)=\ln(1+x^2)+x$,$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,由 $\ln(1+0)+0=0$ 且 $f(x)$为奇函数,得$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,易知 $f(1)=\ln2+1$,则不等式等价于 $f(2x+1)>f(1)$,所以 $2x+1>1$,解得 $x>0$. 故选 A.

8. A 设三棱锥 $A-BCD$ 的表面积为 S,则 $S=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle BCD}+S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}=2\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\sin60^\circ+2\times\frac{1}{2}\times BA\times BD\times\sin\angle ABD=4\sqrt{3}+8\sin\angle ABD$,当$\angle ABD=90^\circ$,即 $AB\perp BD$ 时,表面积最大为 $8+4\sqrt{3}$. 过 A 作 BC 的垂线,垂足为 E,连接 ED,设三棱锥 $A-BCD$ 的体积为 V,则 $V=V_{B-AED}+V_{C-AED}=\frac{1}{3}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=\frac{8}{3}$,设内切球的半径为 r,因为 $V=\frac{1}{3}Sr$,所以 $r=4-2\sqrt{3}$. 故选 A.

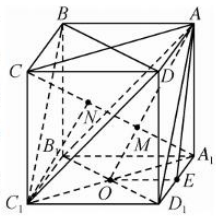
9. ABC 因为 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$,所以$(a+b)^2-4(a+b)-4\geqslant0$,解得 $a+b\geqslant2\sqrt{2}+2$ 或 $a+b\leqslant-2\sqrt{2}+2$(舍),即 $a+b\geqslant2\sqrt{2}+2$(当且仅当 $a=b=\sqrt{2}+1$ 时取等号),A 正确;$2a+b=2a+\frac{a+1}{a-1}=2(a-1)+\frac{2}{a-1}+3\geqslant2\sqrt{2(a-1)\cdot\frac{2}{a-1}}+3=7$,当且仅当 $a=2$ 时取等号,B 正确;因为 $a+b\geqslant2\sqrt{ab}$,所以 $1\leqslant ab-2\sqrt{ab}$,解得 $ab\geqslant3+2\sqrt{2}$(当且仅当 $a=b=\sqrt{2}+1$ 时取等号),C 正确;$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{ab-1}{ab}=1-\frac{1}{ab}\geqslant1-\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=2\sqrt{2}-2$(当且仅当 $a=b=\sqrt{2}+1$ 时取等号),D 错误. 故选 ABC.

10. AB 函数 $y=f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f(-x)=2\sin^2(-x)-3\sin|-x|+1=2\sin^2x-3\sin|x|+1=f(x)$,所以函数 $y=f(x)$是偶函数,A 正确;当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$时,$0<\sin x<\frac{\sqrt{2}}{2}$,$f(x)=2\sin^2x-3\sin x+1=2\left(\sin x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$,令 $t=\sin x$,由于函数 $y=2\left(t-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$在 $t\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$时单调递减,函数 $t=\sin x$ 在 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$时单调递增,所以函数 $y=f(x)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$上单调递减,故函数 $y=f(x)$在区间$\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$上单调递增,B 正确;当 $x\in[0,\pi]$时,由 $f(x)=2\sin^2x-3\sin x+1=0$,得 $\sin x=\frac{1}{2}$或 $\sin x=1$,所以 $x=\frac{\pi}{6}$或 $x=\frac{\pi}{2}$或 $x=\frac{5\pi}{6}$,所以偶函数 $y=f(x)$在

$[-\pi,\pi]$上有6个零点,C不正确;当$x\in[0,+\infty)$时,$f(x)=2\sin^2x-3\sin x+1=2\left(\sin x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$,因为$-1\leqslant\sin x\leqslant1$,所以当$\sin x=\frac{3}{4}$时,$f(x)_{\min}=-\frac{1}{8}$,当$\sin x=-1$时,$f(x)_{\max}=6$,由于函数$y=f(x)$是偶函数,因此,函数$y=f(x)$的值域为$\left[-\frac{1}{8},6\right]$,D不正确. 故选AB.

11. CD　根据已知得曲线C的方程为$(x-1)^2+(y+2)^2=6$,设曲线C'上任意一点坐标为$P(x,y)$,它关于点$\left(\frac{1}{2},m\right)$的对称点坐标为$P'(x_0,y_0)$,则$(x_0-1)^2+(y_0+2)^2=6$,依据中点坐标公式得到$\begin{cases}\frac{x_0+x}{2}=\frac{1}{2},\\ \frac{y_0+y}{2}=m,\end{cases}$则$\begin{cases}x_0=1-x,\\ y_0=2m-y,\end{cases}$代入得到$C'$的方程为$x^2+(y-2m-2)^2=6$,因为曲线$C'$与坐标轴围成的四边形面积为$4\sqrt{3}$,所以$\frac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times2\sqrt{6-(2m+2)^2}=4\sqrt{3}$,解得$m=0$或$m=-2$. 故选CD.

12. ABD　连结A_1C_1,AC,则$A_1C_1/\!/AC$,$\therefore A_1,C_1,A,C$四点共面,$\therefore A_1C\subset$平面ACC_1A_1,$\because M\in A_1C$,$\therefore M\in$平面ACC_1A_1,又$M\in$平面AB_1D_1,$\therefore M$在平面ACC_1A_1与平面AB_1D_1的交线上,同理A,O也在平面ACC_1A_1与平面AB_1D_1的交线上. $\therefore A,M,O$三点共线,故A正确;设直线A_1C与平面BC_1D的交点为N,易证平面$AB_1D_1/\!/$平面C_1BD,从而$OM/\!/C_1N$,因为O为A_1C_1中点,所以M为A_1N中点,同理可得N为CM的中点,所以$A_1M=\frac{1}{3}A_1C=1$,故B正确;取A_1D_1中点E,连接AE,OE. 因为平面$ADD_1A_1/\!/$平面BCC_1B_1,则$\angle OAE$即为直线AO与平面BCC_1B_1所成角,$\tan\angle OAE=\frac{OE}{AE}=\frac{2\sqrt{17}}{17}$,故C错误;因为$A_1O=\frac{1}{2}A_1C_1$,$A_1M=\frac{1}{3}A_1C$,所以$S_{\triangle A_1OM}=\frac{1}{6}S_{\triangle A_1CC_1}=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}A_1C_1\cdot CC_1=\frac{\sqrt{5}}{6}$,故D正确. 故选ABD.



13. $\frac{4\sqrt{7}}{7}$　由已知得,双曲线的焦点在y轴上,且焦点坐标为$(0,\pm1)$,不妨取$(0,1)$,它到直线$y=ax$的距离为$\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{4}{5}$,解得$a=\frac{3}{4}$,所以双曲线$C$的离心率为$\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}=\frac{4\sqrt{7}}{7}$.

14. $\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6}$　因为α为锐角,且$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$,所以$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,所以$\cos\alpha=\cos\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6}$.

15. $m<-\frac{3}{256}$　若$q=1$,则$a_1=q=1$,即$a_n=1$,此时$a_5\neq a_1+S_4$,与题意不符,舍去;若$q\neq1$,由$a_5=a_1+S_4$,可得$a_1q^4=a_1+\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}$,即$a_1(1-q^4)+\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=0$,$a_1(1-q^4)\left(1+\frac{1}{1-q}\right)=0$,解得$q=a_1=2$,则$a_n=2^n$,$S_n=2(2^n-1)$. 对一切正整数$n$,不等式$13-2n-2m+m\cdot2^n>2m(2^n-1)$恒成立,化简得$13-2n>m\cdot2^n$,分离可得$m<\frac{13-2n}{2^n}$,设$f(n)=\frac{13-2n}{2^n}$,则$f(n+1)=\frac{11-2n}{2^{n+1}}$,$f(n+1)-f(n)=\frac{2n-15}{2^{n+1}}$,当$1\leqslant n\leqslant7$时,$f(n+1)<f(n)$,即$f(8)<f(7)<\cdots<f(1)$;当$n\geqslant8$时,$f(n+1)>f(n)$,即$f(8)<f(9)<\cdots$,所以$f(n)$的最小值为$f(8)=-\frac{3}{256}$,故答案为$m<-\frac{3}{256}$.

16. $[2\sqrt{3},\sqrt{13})$　设$AB=c$,$AC=b$,$BC=a=4$,对$\sin B+\sin C=2\sin A$运用正弦定理,得到$b+c=2a=8$,所以$c=8-b$,因为该三角形为锐角三角形,所以$\begin{cases}b^2+c^2=b^2+(8-b)^2>16,\\ c^2+16=(8-b)^2+16>b^2,\\ b^2+16>c^2=(8-b)^2,\end{cases}$解得$3<b<5$. 又$bc=b(8-b)=-b^2+8b=-(b-4)^2$

$+16$,得到 $15<bc\leqslant 16$,运用向量得到 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,所以 $|\overrightarrow{AD}|=\frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos\theta}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cdot\frac{b^2+c^2-16}{2bc}}=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-16}=\frac{1}{2}\sqrt{112-4bc}$,结合 bc 的范围,代入,得到 $|\overrightarrow{AD}|$ 的范围为 $[2\sqrt{3},\sqrt{13})$.

17. 解:(1)由 $a_n+S_n=1$,得 $a_{n+1}+S_{n+1}=1$,

两式相减,得 $a_{n+1}-a_n+S_{n+1}-S_n=0$,

所以 $2a_{n+1}=a_n$,即 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$. ………………………………………………………………………………… 2分

又因为 $n=1$ 时,$a_1+S_1=1$,所以 $a_1=\frac{1}{2}$, ……………………………………………………………………………… 3分

因为 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 $\frac{1}{2}$,公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列.

所以 $a_n=a_1q^{n-1}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$. …………………………………………………………… 5分

(2)由(1)得 $b_n=12+\log_2\left(\frac{1}{2}\right)^n=12-n$, ………………………………………………………………………… 6分

当 $n\leqslant 12$ 时,$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{n(b_1+b_n)}{2}=\frac{-n^2+23n}{2}$, ……………………………………………………… 7分

当 $n\geqslant 13$ 时,$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_{12}-(b_{13}+b_{14}-\cdots-b_n)=2(b_1+b_2+\cdots+b_{12})-(b_1+b_2+\cdots+b_n)=2\times\frac{12(b_1+b_{12})}{2}-\frac{n(b_1+b_n)}{2}=\frac{n^2-23n+264}{2}$. …………………………………………………………………………………… 9分

综上,$T_n=\begin{cases}\frac{-n^2+23n}{2}, n\leqslant 12,\\ \frac{n^2-23n+264}{2}, n\geqslant 13.\end{cases}$ ……………………………………………………………………… 10分

18. 解:(1)在△ABD 中,∵$AB=AD=4$,$A=\frac{2\pi}{3}$

∴$BD=2AD\cos\angle ADB=2\times 4\times\cos\frac{\pi}{6}=4\sqrt{3}$. …………………………………………………………… 2分

在△BCD 中,由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{BD}{\sin C}$,

∴$\sin\angle BDC=\frac{BC\sin C}{BD}=\frac{6\times\sin\frac{\pi}{3}}{4\sqrt{3}}=\frac{3}{4}$. ………………………………………………………………… 4分

∵$BC<BD$,∴$0<\angle BDC<\frac{\pi}{3}$,∴$\cos\angle BDC=\sqrt{1-\sin^2\angle BDC}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$. ……………………… 6分

(2)在△ABD 中,由余弦定理得 $BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos A=4^2+4^2-2\times4\times4\times\cos A=32-32\cos A$,

在△CBD 中,由余弦定理得 $BD^2=CB^2+CD^2-2CB\cdot CD\cos C=6^2+2^2-2\times6\times2\times\cos C=40-24\cos C$,

从而 $4\cos A-3\cos C=-1$,① …………………………………………………………………………………………… 8分

由 $S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CBD}=\frac{1}{2}\times4\times4\times\sin A+\frac{1}{2}\times6\times2\times\sin C=4$ 得,

$4\sin A+3\sin C=2$,② ……………………………………………………………………………………………… 10分

①^2+②^2 得,$16(\sin^2A+\cos^2A)+9(\sin^2C+\cos^2C)-24(\cos A\cos C-\sin A\sin C)=5$,

∴$\cos(A+C)=\frac{5}{6}$. …………………………………………………………………………………………………… 12分

19.(1)证明：连结 AD_1 交 A_1D 于 F，连接 D_1B，

因为四边形 AA_1D_1D 为正方形，所以 $AD_1\perp A_1D$，…… 1分

因为正方形 AA_1D_1D 与矩形 $ABCD$ 所在平面互相垂直，交线为 AD，$AB\perp AD$，$AB\subset$平面 $ABCD$，

所以 $AB\perp$平面 AA_1D_1D，…… 3分

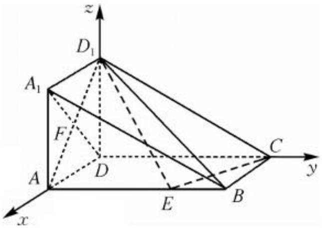
又 $A_1D\subset$平面 AA_1D_1D，所以 $AB\perp A_1D$，…… 4分

又 $AD_1\cap AB=A$，AD_1，$AB\subset$平面 AD_1B，所以 $A_1D\perp$平面 AD_1B，…… 5分

又 $D_1E\subset$平面 AD_1B，所以 $A_1D\perp D_1E$. …… 6分

(2)解：存在满足条件的点 E，$AE=2-\frac{\sqrt{3}}{3}$. …… 7分

解法一：依题意，以 D 为坐标原点，DA、DC、DD_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系，因为 $AB=2AD=2$，则 $D(0,0,0)$，$C(0,2,0)$，$D_1(0,0,1)$，$A_1(1,0,1)$，



所以$\overrightarrow{DD_1}=(0,0,1)$，$\overrightarrow{D_1C}=(0,2,-1)$. …… 8分

易知$\overrightarrow{DD_1}$为平面 ECD 的法向量，

设 $E(1,a,0)(0\leqslant a\leqslant 2)$，所以$\overrightarrow{EC}=(-1,2-a,0)$.

设平面 D_1EC 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，所以$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{D_1C}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EC}=0,\end{cases}$

即$\begin{cases}(x,y,z)\cdot(0,2,-1)=0,\\(x,y,z)\cdot(-1,2-a,0)=0,\end{cases}$ 所以$\begin{cases}z=2y,\\x=(2-a)y,\end{cases}$ 取 $y=1$，

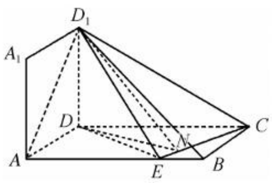
则 $\boldsymbol{n}=(2-a,1,2)$，…… 9分

又二面角 D_1-EC-D 的大小为$\frac{\pi}{6}$，所以 $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{|\overrightarrow{DD_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{DD_1}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|(0,0,1)\cdot(2-a,1,2)|}{\sqrt{1^2}\cdot\sqrt{(2-a)^2+1+2^2}}$，

即 $3a^2-12a+11=0$，解得 $a=2\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. …… 11分

又因为 $0\leqslant a\leqslant 2$，所以 $a=2-\frac{\sqrt{3}}{3}$，即 $AE=2-\frac{\sqrt{3}}{3}$. …… 12分

解法二：假设存在满足条件的点 E，过点 D 作 $DN\perp CE$ 于点 N，连结 D_1N，则 $D_1N\perp CE$，所以$\angle D_1ND$ 为二面角 D_1-CE-D 的平面角，



所以$\angle D_1ND=\frac{\pi}{6}$. …… 9分

在 Rt$\triangle D_1ND$ 中，$D_1D=1$ 所以 $DN=\sqrt{3}$，…… 10分

又在 Rt$\triangle DNC$ 中，$CD=AB=2$，

所以$\angle NDC=\frac{\pi}{6}$，所以$\angle ECB=\frac{\pi}{6}$，…… 11分

在 Rt$\triangle ECB$ 中，$BE=BC\cdot\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $AE=2-\frac{\sqrt{3}}{3}$. …… 12分

20.解：(1)设比赛再继续进行 X 局甲赢得全部奖金，则 $X=1,2$. …… 1分

$P(X=1)=\frac{3}{4}$，$P(X=2)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$，故 $P_{甲}=\frac{3}{4}+\frac{3}{16}=\frac{15}{16}$，…… 3分

从而 $P_{甲}:P_{乙}=15:1$. …… 4分

(2)设比赛继续进行 Y 局甲赢得全部奖金，则 $Y=2,3$. …… 5分

$P(Y=2)=p^2$，$P(Y=3)=C_2^1p^2(1-p)=2p^2(1-p)$，

故 $P_{甲}=p^2+2p^2(1-p)=3p^2-2p^3$，即 $f(p)=3p^2-2p^3$，…… 8分

则 $f'(p)=6p(1-p)$，当 $\frac{6}{7}\leqslant p<1$ 时，$f'(p)>0$，

因此 $f(p)$ 在 $\left[\frac{6}{7},1\right)$ 上单调递增，从而 $f(p)\geqslant f\left(\frac{6}{7}\right)=\frac{324}{343}$，………… 10 分

所以 $P(A)=1-f(p)\leqslant\frac{19}{343}\approx0.055<0.06$，故事件 A 是小概率事件. ………… 12 分

21. 解：(1)设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $H\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$，直线 OH 的斜率 $k_{OH}=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=-\frac{1}{2}$. ………… 1 分

因为 M,N 在椭圆 C 上，所以 $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$，$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$，

两式相减得 $\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2}+\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2}=0$，即 $\frac{1}{a^2}+\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2(x_1+x_2)(x_1-x_2)}=0$，………… 3 分

又 $k_{MN}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=1$，所以 $\frac{1}{a^2}-\frac{1}{2b^2}=0$，即 $a^2=2b^2$. ………… 4 分

又因为椭圆 C 过点 $\left(1,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$，所以 $\frac{1}{a^2}+\frac{3}{2b^2}=1$，解得 $a^2=4$，$b^2=2$，

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$. ………… 5 分

(2)联立 $\begin{cases}y=kx+2,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$ 消 y 整理得：$(2k^2+1)x^2+8kx+4=0$.

因为直线与椭圆交于 A,B 两点，故 $\Delta>0$，解得 $k^2>\frac{1}{2}$. ………… 6 分

设 $A(x_3,y_3)$，$B(x_4,y_4)$，则 $x_3+x_4=\frac{-8k}{2k^2+1}$，$x_3x_4=\frac{4}{2k^2+1}$.

设 AB 中点 $G(x_0,y_0)$，则 $x_0=\frac{x_3+x_4}{2}=\frac{-4k}{2k^2+1}$，$y_0=kx_0+2=\frac{2}{2k^2+1}$，故 $G\left(\frac{-4k}{2k^2+1},\frac{2}{2k^2+1}\right)$. ………… 7 分

假设存在 k 和点 $P(m,0)$，使得 $\triangle PAB$ 是以 P 为直角顶点的等腰直角三角形，则 $PG\perp AB$，故 $k_{PG}\cdot k_{AB}=-1$，

所以 $\frac{\frac{2}{2k^2+1}}{\frac{-4k}{2k^2+1}-m}\times k=-1$，解得 $m=\frac{-2k}{2k^2+1}$，故 $P\left(\frac{-2k}{2k^2+1},0\right)$. ………… 8 分

又因为 $\angle APB=\frac{\pi}{2}$，所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，

所以 $(x_3-m,y_3)\cdot(x_4-m,y_4)=0$，即 $(x_3-m)(x_4-m)+y_3y_4=0$，

整理得 $(k^2+1)x_3x_4+(2k-m)(x_3+x_4)+m^2+4=0$.

所以 $(k^2+1)\cdot\frac{4}{2k^2+1}-(2k-m)\cdot\frac{8k}{2k^2+1}+m^2+4=0$，………… 10 分

代入 $m=\frac{-2k}{2k^2+1}$，整理得 $k^4=1$，即 $k^2=1$，所以 $k=1$ 或 $k=-1$.

即存在 k 使得 $\triangle PAB$ 是以 P 为顶点的等腰直角三角形. ………… 11 分

当 $k=-1$ 时，P 点坐标为 $\left(\frac{2}{3},0\right)$；当 $k=1$ 时，P 点坐标为 $\left(-\frac{2}{3},0\right)$.

此时，$\triangle PAB$ 是以 P 为直角顶点的等腰直角三角形. ………… 12 分

22. (1)解：函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=2ax+a-2-\frac{1}{x}=\frac{(ax-1)(2x+1)}{x}$，………… 1 分

$a\leqslant0$ 时，$f'(x)<0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；………… 2 分

$a>0$ 时，令 $f'(x)=0$ 得 $x=\frac{1}{a}$，

当 $x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$时，$f'(x)<0$；当 $x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递增. ………………………… 3 分

(2)证明：$a\leqslant 0$ 时，由(1)知 $f(x)$至多有一个零点. ………………………… 4 分

$a>0$ 时，由(1)知当 $x=\frac{1}{a}$时，$f(x)$取得最小值，最小值为 $f\left(\frac{1}{a}\right)=1-\frac{1}{a}+\ln a$.

①当 $a=1$ 时，由于 $f\left(\frac{1}{a}\right)=0$，故 $f(x)$只有一个零点；

②当 $a>1$ 时，$1-\frac{1}{a}+\ln a>0$ 即 $f\left(\frac{1}{a}\right)>0$，故 $f(x)$没有零点； ………………………… 5 分

③当 $0<a<1$ 时，$1-\frac{1}{a}+\ln a<0$ 即 $f\left(\frac{1}{a}\right)<0$，

又 $f\left(\frac{1}{e}\right)=a\left(\frac{1}{e}\right)^2+(a-2)\left(\frac{1}{e}\right)-\ln\frac{1}{e}=\frac{a}{e^2}+\frac{a}{e}+1-\frac{2}{e}>0$，

由(1)知 $f(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$上有一个零点.

又 $f\left(\frac{3}{a}\right)=a\left(\frac{3}{a}\right)^2+(a-2)\left(\frac{3}{a}\right)-\ln\frac{3}{a}=3+\frac{3}{a}-\ln\frac{3}{a}>4>0$，

由(1)知 $f(x)$在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$有一个零点，

所以 $f(x)$在$(0,+\infty)$上有两个零点，a 的取值范围为$(0,1)$ ………………………… 7 分

不妨设 $x_1<x_2$，则$\frac{1}{e}<x_1<\frac{1}{a}<x_2<\frac{3}{a}$，且$\frac{2}{a}-x_1>\frac{1}{a}$.

令 $F(x)=f(x)-f\left(\frac{2}{a}-x\right)$

$$=ax^2+(a-2)x-\ln x-\left[a\left(\frac{2}{a}-x\right)^2+(a-2)\left(\frac{2}{a}-x\right)-\ln\left(\frac{2}{a}-x\right)\right]$$

$$=2ax-\ln x+\ln\left(\frac{2}{a}-x\right)-2，x\in\left(0,\frac{2}{a}\right).$$

则 $F'(x)=2a-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\frac{2}{a}-x}\right)$，

由于 $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\frac{2}{a}-x}\right)=\frac{a}{2}\left(x+\frac{2}{a}-x\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\frac{2}{a}-x}\right)=\frac{a}{2}\left(2+\frac{\frac{2}{a}-x}{x}+\frac{x}{\frac{2}{a}-x}\right)\geqslant\frac{a}{2}\left(2+2\sqrt{\frac{\frac{2}{a}-x}{x}\cdot\frac{x}{\frac{2}{a}-x}}\right)=2a$

(且仅当 $x=\frac{1}{a}$等号成立)，………………………… 9 分

所以当 $x\in\left(0,\frac{2}{a}\right)$时，$F'(x)\leqslant 0$，$F(x)$在$\left(0,\frac{2}{a}\right)$单调递减，又 $F\left(\frac{1}{a}\right)=0$，

所以 $F(x_1)>F\left(\frac{1}{a}\right)=0$，即 $F(x_1)=f(x_1)-f\left(\frac{2}{a}-x_1\right)>0$， ………………………… 10 分

又 $f(x_1)=f(x_2)$，所以 $f(x_2)>f\left(\frac{2}{a}-x_1\right)$，

又由于 $x_2>\frac{1}{a}$，$\frac{2}{a}-x_1>\frac{1}{a}$，且 $f(x)$在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递增，

所以 $x_2>\frac{2}{a}-x_1$ 即 $x_1+x_2>\frac{2}{a}$. ………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。