

绝密★启用前

“天一大联考·皖豫名校联盟”2023 届高中毕业班第三次考试

数 学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上，并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M = \{y \mid y \geq 1\}$, $N = \left\{x \mid y = \sqrt{\frac{2-x}{x}}\right\}$, 则 $M \cap N =$
 A. $[1, 2]$ B. $[2, +\infty)$ C. $[1, 2)$ D. $[1, +\infty)$
2. 已知复数 z, z_0 满足 $|z - z_0| = \sqrt{2}$, $|z_0| = \sqrt{2}$, 则 $|z|$ 的最大值为
 A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. 4 D. $3\sqrt{2}$
3. 将向量 $\vec{OP} = (1, \sqrt{3})$ 绕坐标原点 O 顺时针旋转 30° 得到 \vec{OP}_1 , 则 $\vec{OP} \cdot \vec{OP}_1 =$
 A. 0 B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $2\sqrt{3}$
4. 某社区举行“喜迎五一”书画作品比赛，参加比赛的老年人占 $\frac{3}{5}$, 中年人占 $\frac{1}{5}$, 小朋友占 $\frac{1}{5}$, 经评审，评出一、二、三等奖作品若干，其中老年人、中年人、小朋友的作品获奖的概率分别为 0.6, 0.2, 0.1. 现从所有作品中任取一件，则取到获奖作品的概率为
 A. 0.21 B. 0.4 C. 0.42 D. 0.58
5. 在室温下，某型号硅二极管的伏安特性曲线可用公式 $I = 10^{-13}(e^{\frac{U}{0.026}} - 1)$ 来表示，其中 I 是导通电流，规定 $|I| < 10^{-7}$ 时视为二极管关断，否则视为二极管开通， U 是加在二极管两端的电压。若在室温下，分别在该型号二极管两端加 0.78 V 正向电压（即 $U = 0.78$ ）和 0.78 V 反向电压（即 $U = -0.78$ ），则此时二极管的状态分别为
 A. 开通、开通 B. 关断、关断
 C. 开通、关断 D. 关断、开通

数学试题 第 1 页（共 4 页）

6. 如图为一个火箭的整流罩的简单模型的轴截面, 整流罩是空心的, 无下底面, 由两个部分组成, 上部分近似为圆锥, 下部分为圆柱, 则该整流罩的外表面的面积约为

- A. $2.018 \times 10^7 \pi \text{ mm}^2$
 B. $1.824 \times 10^7 \pi \text{ mm}^2$
 C. $1.468 \times 10^7 \pi \text{ mm}^2$
 D. $1.28 \times 10^7 \pi \text{ mm}^2$



7. 已知 $\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - 7\sin\left(2\alpha + \frac{3\pi}{4}\right) = 5\sqrt{2}$, 则 $\tan \alpha =$

- A. $-\frac{3}{5}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{4}{3}$ D. 2

8. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$, 过坐标原点 O 作两条相互垂直的直线分别与抛物线 C 相交于 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ 两点 (M, N 均与点 O 不重合). 若直线 MN 恒过点 $(8, 0)$, 则 $x_1 + 2x_2$ 的最小值为

- A. $16\sqrt{2}$ B. $12\sqrt{2}$ C. $10\sqrt{2}$ D. $6\sqrt{2}$

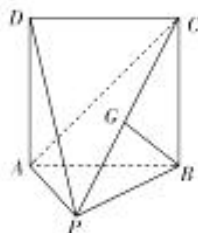
二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 若在 $(1+2x)^2 + (1+2x)^3 + \dots + (1+2x)^n = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ 中, $a_0 = 5$, 则

- A. $n = 7$ B. $a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n = \frac{3^7 - 9}{2}$
 C. $a_2 = 224$ D. $a_n = 64$

10. 如图, 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球的直径为 4, 四边形 $ABCD$ 为正方形, 平面 $ABCD \perp$ 平面 APB , G 为棱 PC 的中点, $PA \perp PB, BP = \sqrt{6}$, 则

- A. $AB \parallel$ 平面 PCD
 B. $AP \perp BG$
 C. AC 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$
 D. 四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $4\sqrt{6}$



11. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P_1 与位于双曲线右支上的 P_2 关于 y 轴对称, 点 P_1 与 P_3 关于 x 轴对称, $\angle P_1F_1F_2 = 60^\circ$, M 为双曲线上一动点 (不与 P_1, P_2, P_3 重合), 且直线 MP_3 与 MP_2 的斜率均存在, 则

- A. $|P_2F_1| - |P_1F_1| = 4$ B. $P_2F_1 \perp P_2F_2$
 C. 四边形 $F_1F_2P_2P_1$ 的面积为 $\frac{39\sqrt{3}}{4}$ D. 直线 MP_3 与 MP_2 的斜率之积为 3

12. 已知函数 $f(x), g(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} , $f(x+2)$ 为偶函数, $f(x) = g(4-2x) - g(2x)$, 且当 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x) = (x-1)^3$, 则
- A. $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称
- B. $f(2023) = 1$
- C. $\sum_{k=1}^{100} [k \cdot f(k)] = -50$
- D. 方程 $f(x) = \cos \frac{\pi}{4}x$ 在区间 $[-2, 38]$ 上的所有实根之和为 144

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知圆 $M: x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$ 与圆 $x^2 + y^2 = m$ 的公共弦经过点 M , 则 $m =$ _____.
14. 88 键钢琴从左到右各键的音的频率组成一个递增的等比数列. 若中音 A (左起第 49 个键) 的频率为 440 Hz, 钢琴上最低音的频率为 27.5 Hz, 则左起第 61 个键的音的频率为 _____ Hz.
15. 将函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象上所有点的纵坐标保持不变, 横坐标变为原来的 $\frac{2}{\omega}$ ($\omega \in \mathbf{N}^+$) 倍后, 所得函数 $g(x)$ 的图象在区间 $(0, \pi)$ 上有且仅有两条对称轴和两个对称中心, 则 ω 的值为 _____.
16. 设函数 $f(x) = e^{2x} + a, g(x) = e^x + x$, 若存在 $x_1, x_2, \dots, x_{2023} \in [-1, 1]$, 使得 $\sum_{i=1}^{2022} f(x_i) + g(x_{2023}) = \sum_{i=1}^{2022} g(x_i) + f(x_{2023})$ 成立, 则实数 a 的最大值为 _____.

四、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = -3, a_{n+1} + a_n = 4n - 2 (n \in \mathbf{N}^+)$.

(I) 证明 $\{a_n - 2(n-1)\}$ 为等比数列, 并求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 $\{a_n\}$ 的前 $2n$ 项和为 $T_{2n}, b_n = T_{2n} + 6n$, 证明: 数列 $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和小于 $\frac{1}{4}$.

18. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $a = c - 2a \cos B$.

(I) 证明: $B = 2A$;

(II) 若 $4a = \sqrt{6}b, c = 5$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. (12 分)

某县城为活跃经济, 特举办传统文化民俗节, 小张弄了一个套小白兔的摊位, 设 x_i 表示第 i 天的平均气温, y_i 表示第 i 天参与活动的人数, $i = 1, 2, \dots, 20$, 根据统计, 计算得到如下一

些统计量的值: $\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2 = 80$, $\sum_{i=1}^{20} (y_i - \bar{y})^2 = 9000$, $\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 800$.

(I) 根据所给数据,用相关系数 r (精确到 0.01) 判断是否可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系;

(II) 现有两个家庭参与套圈, A 家庭 3 位成员每轮每人套住小白兔的概率都为 $\frac{3}{10}$, B 家庭

3 位成员每轮每人套住小白兔的概率分别为 $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$, 每个家庭的 3 位成员均玩一次套圈为一轮, 每轮每人收费 20 元, 每个小白兔价值 40 元, 且每人是否套住相互独立, 以每个家庭的盈利的期望为决策依据, 问: 一轮结束后, 哪个家庭损失较大?

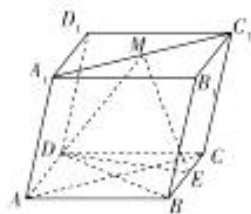
附: 相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$.

20. (12 分)

已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的各棱长均为 2, $\angle A_1AB = \angle A_1AD = \angle DAB = 60^\circ$, M, E 分别是线段 A_1C_1, BC 的中点.

(I) 证明: $BD \perp$ 平面 AA_1C_1C ;

(II) 求平面 DME 与平面 AA_1C_1C 的夹角的余弦值.



21. (12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的长轴长是短轴长的 $\sqrt{2}$ 倍, 过椭圆 C 的右焦点 F 的直线

l 与 C 交于 P, Q 两点, 且当直线 l 的倾斜角为 45° 时, $|PQ| = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 若点 P 在 x 轴上方, E 为线段 PF 的中点, 椭圆 C 的左焦点为 F' , 直线 PO (O 为坐标原点) 与 EF' 交于点 A , 求 $\frac{S_{\triangle OFA}}{S_{\triangle EF'F}}$ (S 表示面积) 的取值范围.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = x(\ln x - a)$ 在区间 $[1, e]$ 上的最小值为 -1 , 函数 $g(x) = \frac{m}{2}x^2 - m, a, m \in \mathbf{R}$.

(I) 求 a 的值;

(II) 设函数 $F(x) = f(x) - g(x)$, x_1, x_2 是 $F(x)$ 的两个不同的极值点, 且 $x_1 < x_2$, 证明: $2\ln x_1 + 3\ln x_2 > 5$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



自主选拔在线
微信号: zizzsw



自主选拔在线
微信号: zizzsw



自主选拔在线
微信号: zizzsw