绝密★启用前

2023年河南省普通高中毕业班高考适应性测试

理科数学

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。

2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。

3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集$U=\{1,2,3,4,5,6\}$,集合$M=\{1,3,6\}$,$N=\{2,3,4\}$,则$\complement_U(M\cup N)=$

A. $\{5\}$　　B. $\{1,2\}$　　C. $\{3,4\}$　　D. $\{1,2,3,4\}$

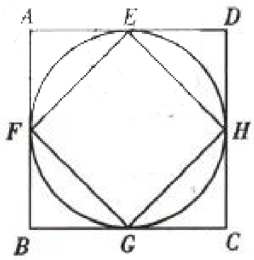
2. 已知m,n为实数,$1-i$(i为虚数单位)是关于x的方程$x^2-mx+n=0$的一个根,则$m+n=$

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 4

3. 设数列$\{a_n\}$为正项等差数列,且其前n项和为S_n,若$S_{2023}=2023$,则下列判断错误的是

A. $a_{1012}=1$　　B. $a_{1013}\geqslant 1$　　C. $S_{2022}>2022$　　D. $S_{2024}\geqslant 2024$

4. 已知四边形$ABCD$为正方形,其内切圆I与各边分别切于E,F,G,H,连接EF,FG,GH,HE,如图所示. 现向正方形$ABCD$内随机抛掷一枚豆子,记事件M为豆子落在圆I内,事件N为豆子落在四边形$EFGH$外,则$P(N|M)=$



A. $1-\dfrac{\pi}{4}$　　B. $\dfrac{\pi}{4}$

C. $1-\dfrac{2}{\pi}$　　D. $\dfrac{2}{\pi}$

5. 已知D,E分别是$\triangle ABC$的边AB,AC上的点,且满足$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AE}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. F为直线DE与直线BC的交点. 若$\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$($\lambda,\mu$为实数),则$\mu-\lambda$的值为

A. 1　　B. $-\dfrac{5}{3}$　　C. $\dfrac{5}{3}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

6. 已知函数$f(x)=2\cos^2\omega x+\sqrt{3}\sin 2\omega x-1(\omega>0)$的最小正周期为$\dfrac{\pi}{2}$,把函数$f(x)$的图象向右平移$\dfrac{\pi}{12}$个单位长度,得到函数$g(x)$的图象,则函数$g(x)$的图象上距离原点最近的对称

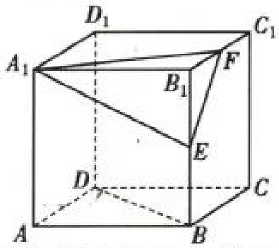
中心为

A. $\left(-\frac{\pi}{24},0\right)$　　B. $\left(\frac{\pi}{24},0\right)$　　C. $\left(-\frac{\pi}{48},0\right)$　　D. $\left(\frac{\pi}{48},0\right)$

7. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2,P 是双曲线 C 的一条渐近线上的点，且线段 PF_1 的中点 M 在另一条渐近线上. 若 $\angle PF_2F_1=45°$，则双曲线 C 的离心率为

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

8. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F 分别是棱 B_1B,B_1C_1 的中点，则过线段 BD 且垂直于平面 A_1EF 的截面图形为



A. 等腰梯形　　B. 三角形

C. 正方形　　D. 矩形

9. 某中学坚持"五育"并举，全面推进素质教育. 为了更好地增强学生们的身体素质，校长带领同学们一起做俯卧撑锻炼. 锻炼是否达到中等强度运动，简单测量方法为 $f(t)=ke^t$，其中 t 为运动后心率(单位：次/分)与正常时心率的比值，k 为每个个体的体质健康系数. 若 $f(t)$ 介于 $[28,34]$ 之间，则达到了中等强度运动；若低于 28，则运动不足；若高于 34，则运动过量. 已知某同学正常时心率为 80，体质健康系数 $k=7$，经过俯卧撑后心率 y(单位：次/分)满足 $y=80\left(\ln\sqrt{\frac{x}{12}}+1\right)$，$x$ 为俯卧撑个数. 已知俯卧撑每组 12 个，若该同学要达到中等强度运动，则较合适的俯卧撑组数为(e 为自然对数的底数，e≈2.718)

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

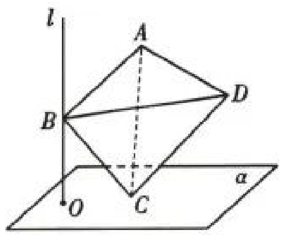
10. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x+1)$ 为奇函数，$f(x+2)$ 为偶函数，当 $x\in[1,2]$ 时，$f(x)=ax^2+b$. 若 $f(0)+f(3)=3$，则 $f\left(\frac{9}{2}\right)=$

A. $-\frac{5}{4}$　　B. $-\frac{3}{4}$　　C. $\frac{7}{4}$　　D. $\frac{5}{4}$

11. 实数 x,y,z 分别满足 $x^{2022}=e$，$2022^y=2023$，$2022z=2023$，则 x,y,z 的大小关系为

A. $x>y>z$　　B. $x>z>y$　　C. $z>x>y$　　D. $y>x>z$

12. 如图，直线 $l\perp$ 平面 α，垂足为 O，正四面体 $ABCD$(所有棱长都相等的三棱锥)的棱长为 2，C 在平面 α 内，B 是直线 l 上的动点，当 O 到 AD 的距离最大时，该正四面体在平面 α 上的射影面积为



A. $\sqrt{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\sqrt{2}$　　D. $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 抛物线 $y=2x^2$ 的焦点到准线的距离为________.

14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+x+1, x\geq 0,\\ 2x+1, x<0.\end{cases}$ 若 $f(m)<f(2-m^2)$，则实数 m 的取值范围是________.

15. 安排 A,B,C,D,E 五名志愿者到甲，乙两个福利院做服务工作，每个福利院至少安排一名志愿者，则 A,B 被安排在不同的福利院的概率为________.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=0, a_{n+1}=-a_n^2+a_n+c(n\in\mathbf{N}^*)$. 若数列 $\{a_n\}$ 为单调递增数列，则实数 c 的取值范围为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答，第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）

已知在△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c，在①$a\sin C-c\cos\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=0$；②$2c\cos A=a\cos B+b\cos A$；③$b\sin B+c\sin C-a\sin A-b\sin C=0$ 中任选一个作为条件解答下面两个问题.

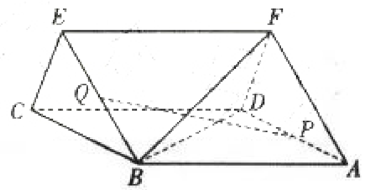
（1）求角 A；

（2）已知 $b=6$，$S_{\triangle ABC}=3\sqrt{3}$，求 a 的值.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

18.（12 分）

如图，在三棱柱 $ADF-BCE$ 中，四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle ABC=120°$，$AF=\sqrt{3}$，$AD=2DF=2$，P、Q 分别为 AD，BE 的中点，且平面 $ADF\perp$ 平面 $ABCD$.



（1）求证：$DF\perp PQ$；

（2）求直线 PQ 与平面 BDF 所成角的正弦值.

19.（12 分）

某学校筹备成立足球社团，由于报名人数太多，需对报名者进行“点球测试”来决定是否录取. 规则如下：每人最多有四次机会，只要连续踢进 2 个点球，则停止踢球并予以录取，若已经确定不能连续踢进 2 个点球，则停止踢球且不予录取. 下表是某同学六次训练数据，以这 150 个点球中的进球频率代表其单次点球踢进的概率.

点球数	20	30	30	25	20	25
进球数	15	17	22	18	14	14

（1）求该同学被录取的概率；

（2）若该同学要进行“点球测试”，记他在测试中进球的个数为 X，求随机变量 X 的期望.

20. (12分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点 $F(1,0)$,点 $M\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{1}{2}\right)$ 在椭圆 C 上.

(1)求椭圆 C 的标准方程;

(2)过点 $P(2,1)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于 A,B 两点. 若 $\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{PB}$,$\overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{QB}(\lambda>0)$,求 $|\overrightarrow{OQ}|$ 的最小值(O 是坐标原点).

21. (12分)

已知函数 $f(x)=1-\frac{ax^3}{e^x}(a\neq0)$.

(1)讨论 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调性;

(2)若不等式 $2e^xf(x)\geqslant x^3\ln x+x^2+3x$ 恒成立,求实数 a 的取值范围.

(二)选考题:共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分.

22. [选修4-4:坐标系与参数方程](10分)

在直角坐标系 xOy 中,曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\varphi,\\y=\sqrt{2}\sin\varphi\end{cases}$(其中 φ 为参数),以 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\cos^2\theta+4\cos\theta-\rho=0$.

(1)求曲线 C_1 的普通方程和曲线 C_2 的直角坐标方程;

(2)射线 $l:\theta=\alpha$ 与曲线 C_1,C_2 分别交于点 A,B(均异于极点),当 $\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{3}$ 时,求 $\frac{|OB|}{|OA|}$ 的最小值.

23. [选修4-5:不等式选讲](10分)

已知正实数 a,b,c 满足 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$.

(1)求 $a+4b+9c$ 的最小值;

(2)证明:$\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{a+c}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}}\geqslant2\sqrt{abc}$.

2023年河南省普通高中毕业班高考适应性测试

理科数学试题参考答案及评分标准

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	D	C	C	C	B	A	A	B	D	B	D

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. $\frac{1}{4}$　　14. $(-2,1)$　　15. $\frac{8}{15}$　　16. $\left(0,\frac{1}{4}\right]$

三、解答题

（一）必考题：共60分。

17. 解：（1）若选①：因为 $a\sin C-c\cos\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=0$，

所以由正弦定理可得 $\sin A\sin C-\sin C\cos\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=0$. ………………………… 2分

因为 $0<C<\pi$，所以 $\sin C>0$.

所以可得 $\sin A=\cos\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A$，即 $\frac{1}{2}\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A$.

所以 $\tan A=\sqrt{3}$.

因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ………………………… 6分

若选②：因为 $2c\cos A=a\cos B+b\cos A$，

所以由正弦定理可得 $2\sin C\cos A=\sin A\cos B+\sin B\cos A$. ………………………… 2分

所以 $2\sin C\cos A=\sin(A+B)=\sin C$.

因为 $0<C<\pi$，所以 $\sin C>0$. 所以 $\cos A=\frac{1}{2}$.

因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ………………………… 6分

若选③：因为 $b\sin B+c\sin C-a\sin A-b\sin C=0$，所以由正弦定理可得 $b^2+c^2-a^2=bc$. ………… 2分

所以由余弦定理可得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$.

因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ………………………… 6分

（2）由（1）可得 $A=\frac{\pi}{3}$.

因为 $b=6$，$S_{\triangle ABC}=3\sqrt{3}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times6c\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}c=3\sqrt{3}$. 解得 $c=2$. ………………………… 9分

由余弦定理，得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=6^2+2^2-2\times6\times2\times\frac{1}{2}=28$.

所以 $a=2\sqrt{7}$. ………………………… 12分

18. 解：(1) 如图，连接 BP，在菱形 $ABCD$ 中，易得 $BD=2$，$BP\perp AD$.

$\because$ 平面 $ABCD\perp$ 平面 ADF，平面 $ABCD\cap$ 平面 $ADF=AD$，$BP\subset$ 平面 $ABCD$，

$\therefore$ $BP\perp$ 平面 ADF. ………………………………………………………………… 2 分

又 $DF\subset$ 平面 ADF，$\therefore$ $BP\perp DF$.

在 $\triangle ADF$ 中，$\because$ $AF=\sqrt{3}$，$AD=2DF=2$，$\therefore$ $AD^2=DF^2+AF^2$.

$\therefore$ $DF\perp AF$. ………………………………………………………………………… 4 分

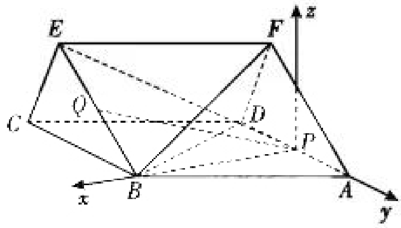
又 $AF/\!/BE$，$\therefore$ $DF\perp BE$.

连接 EP，$\because$ $BE\cap BP=B$，$BE,BP\subset$ 平面 BEP，

$\therefore$ $DF\perp$ 平面 BEP. 来源：高三答案公众号

又 $PQ\subset$ 平面 BEP，$\therefore$ $DF\perp PQ$. ……………………………………………………… 6 分

(2) 由(1)知 $BP\perp AD$，且平面 $ADF\perp$ 平面 $ABCD$. 以 PB,PA 所在直线分别为 x,y 轴，建立如图所示的空间直角坐标系 $P-xyz$，则 $P(0,0,0)$，$A(0,1,0)$，$D(0,-1,0)$，$B(\sqrt{3},0,0)$，$F\left(0,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.



$\overrightarrow{DB}=(\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{DF}=\left(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$\because$ $\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AB}=(\sqrt{3},-1,0)$，

$\therefore$ $E\left(\sqrt{3},-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$Q\left(\sqrt{3},-\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

$\therefore$ $\overrightarrow{PQ}=\left(\sqrt{3},-\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. …………………………………… 8 分

设平面 BDF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{3}x-y=0,\\ \frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0.\end{cases}$

取 $x=1$，则 $y=-\sqrt{3}$，$z=1$. $\therefore$ $\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{3},1)$. ……………………………………………… 10 分

设直线 PQ 与平面 BDF 所成的角为 θ，则

$$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{PQ},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{PQ}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{PQ}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{3}+\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{2}\times\sqrt{5}}=\frac{4}{5}.$$

$\therefore$ 直线 PQ 与平面 BDF 所成角的正弦值为 $\frac{4}{5}$. ……………………………………………… 12 分

19. 解：(1) 由该同学六次训练数据，得该同学进球频率为 $\frac{15+17+22+18+14+14}{150}=\frac{2}{3}$.

所以该同学单次点球踢进的概率为 $\frac{2}{3}$. ………………………………………………………… 2 分

设事件 A 为"该同学被录取"，则 $P(A)=\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{20}{27}$.

所以该同学被录取的概率为 $\frac{20}{27}$. ………………………………………………………………… 5 分

(2) 由题意知 X 的所有可能取值为 $0,1,2,3$. ………………………………………

所以 $P(X=0)=\left(1-\frac{2}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$,

$P(X=1)=2\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)^3=\frac{14}{81}$,

$P(X=2)=\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+2\times\left(1-\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{56}{81}$,

$P(X=3)=\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{81}$. ………………………………………………………… 10 分

所以随机变量 X 的期望为 $E(X)=0\times\frac{1}{27}+1\times\frac{14}{81}+2\times\frac{56}{81}+3\times\frac{8}{81}=\frac{50}{27}$. ………………………… 12 分

20. 解:(1)由椭圆定义知 $2a=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}-0\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}+1\right)^2+\left(\frac{1}{2}-0\right)^2}=2\sqrt{2}$. ………………… 2 分

所以 $a=\sqrt{2}$, $b=c=1$. 所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. ……………………………………… 5 分

(2)由题意知 $\lambda\neq1$. 设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $Q(x_0,y_0)$.

由 $\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{QB}(\lambda>0)$, 得

$\begin{cases}x_1-\lambda x_2=2(1-\lambda),\\ y_1-\lambda y_2=1-\lambda\end{cases}$ 且 $\begin{cases}x_1+\lambda x_2=(1+\lambda)x_0,\\ y_1+\lambda y_2=(1+\lambda)y_0.\end{cases}$ ………………………………………………………… 7 分

又 A, B 均在椭圆 C 上, 所以 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{2}+y_1^2=1,\\ \frac{\lambda^2x_2^2}{2}+\lambda^2y_2^2=\lambda^2.\end{cases}$

两式作差, 得 $\frac{(x_1-\lambda x_2)(x_1+\lambda x_2)}{2}+(y_1-\lambda y_2)(y_1+\lambda y_2)=1-\lambda^2$. (*)

把 $\begin{cases}x_1-\lambda x_2=2(1-\lambda),\\ y_1-\lambda y_2=1-\lambda\end{cases}$ 代入(*)式, 得 $(x_1+\lambda x_2)+(y_1+\lambda y_2)=1+\lambda$.

又由 $\begin{cases}x_1+\lambda x_2=(1+\lambda)x_0,\\ y_1+\lambda y_2=(1+\lambda)y_0\end{cases}$ 得 $(x_1+\lambda x_2)+(y_1+\lambda y_2)=(1+\lambda)(x_0+y_0)$.

所以 $x_0+y_0=1$. ……………………………………………………………………………………… 10 分

所以点 O 到直线 $x+y-1=0$ 的距离 $d=\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

经检验, 此时垂足 $Q\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 在椭圆内部.

所以 $|\overrightarrow{OQ}|$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. ………………………………………………………………… 12 分

21. 解:(1)因为 $f(x)=1-\frac{ax^3}{e^x}$, $x\in(0,+\infty)$,

所以 $f'(x)=\frac{ax^3-3ax^2}{e^x}=\frac{ax^2(x-3)}{e^x}$. ………………………………………………………… 1 分

当 $a>0$ 时, 由 $f'(x)>0$, 得 $x>3$; 由 $f'(x)<0$, 得 $0<x<3$.

所以 $f(x)$ 在 $(0,3)$ 上单调递减,在 $(3,+\infty)$ 上单调递增. ………………………………………… 3 分

当 $a<0$ 时,由 $f'(x)<0$,得 $x>3$;由 $f'(x)>0$,得 $0<x<3$.

所以 $f(x)$ 在 $(0,3)$ 上单调递增,在 $(3,+\infty)$ 上单调递减. ………………………………………… 5 分

综上,当 $a>0$ 时,$f(x)$ 在 $(0,3)$ 上单调递减,在 $(3,+\infty)$ 上单调递增;

当 $a<0$ 时,$f(x)$ 在 $(0,3)$ 上单调递增,在 $(3,+\infty)$ 上单调递减. ………………………………… 6 分

(2)不等式 $2e^xf(x)\geqslant x^3\ln x+x^2+3x$ 恒成立,即不等式 $2e^x-2ax^3\geqslant x^3\ln x+x^2+3x$ 恒成立,

即等价于 $a\leqslant\dfrac{e^x}{x^3}-\dfrac{1}{2}\ln x-\dfrac{1}{2x}-\dfrac{3}{2x^2}$ 恒成立.

设 $g(x)=\dfrac{e^x}{x^3}-\dfrac{1}{2}\ln x-\dfrac{1}{2x}-\dfrac{3}{2x^2}$,$x\in(0,+\infty)$,则

$g'(x)=\dfrac{(x-3)e^x}{x^4}-\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{3}{x^3}=\dfrac{(x-3)\left(e^x-\dfrac{1}{2}x^2-x\right)}{x^4}$. ………………………………………… 8 分

设 $h(x)=e^x-\dfrac{1}{2}x^2-x$,则 $h'(x)=e^x-x-1$.

设 $\varphi(x)=e^x-x-1$,则 $\varphi'(x)=e^x-1$.

由 $\varphi'(x)>0$,得 $x>0$. 所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

则 $\varphi(x)>\varphi(0)=0$,即 $h'(x)>0$. 所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

因为 $h(0)=1>0$,所以 $h(x)>0$. ……………………………………………………………… 10 分

由 $g'(x)=0$,得 $x=3$. 所以当 $g'(x)<0$ 时,$0<x<3$,当 $g'(x)>0$ 时,$x>3$.

所以 $g(x)$ 在 $(0,3)$ 上单调递减,在 $(3,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $g(x)_{\min}=g(3)=\dfrac{e^3}{27}-\dfrac{1}{2}\ln 3-\dfrac{1}{3}$.

所以 $a\leqslant\dfrac{e^3}{27}-\dfrac{1}{2}\ln 3-\dfrac{1}{3}$,即 a 的取值范围是 $\left(-\infty,\dfrac{e^3}{27}-\dfrac{1}{2}\ln 3-\dfrac{1}{3}\right]$. ………………………… 12 分

(二)选考题:共 10 分。

22. 解:(1)由 $\begin{cases}x=2\cos\varphi,\\ y=\sqrt{2}\sin\varphi\end{cases}$ 及 $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$ 可得

曲线 C_1 的普通方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$. ………………………………………………… 2 分

由 $\rho\cos^2\theta+4\cos\theta-\rho=0$,得 $\rho^2\sin^2\theta=4\rho\cos\theta$.

又 $\rho\cos\theta=x$,$\rho\sin\theta=y$,

所以曲线 C_2 的直角坐标方程为 $y^2=4x$. ………………………………………………… 5 分

(2)由 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\\ x^2+y^2=\rho^2\end{cases}$ 得曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2=\dfrac{4}{1+\sin^2\theta}$.

将 $\theta=\alpha$ 代入,得 $|OA|=\dfrac{2}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}}$.

又因为 $|OB|=\dfrac{4\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$,$\alpha\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}\right]$, ………………………………………… 7 分

所以$\dfrac{|OB|}{|OA|}=\dfrac{2\cos\alpha\cdot\sqrt{1+\sin^2\alpha}}{\sin^2\alpha}=\dfrac{2\sqrt{1-\sin^2\alpha}\cdot\sqrt{1+\sin^2\alpha}}{\sin^2\alpha}=2\sqrt{\dfrac{1}{\sin^4\alpha}-1}$. ………………………… 8 分

因为$\dfrac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant\dfrac{\pi}{3}$,所以 $\sin\alpha\in\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

所以当 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$时,$\dfrac{|OB|}{|OA|}$有最小值,最小值为$\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$. ………………………………………………… 10 分

23. 解:(1)因为 a,b,c 均为正实数,且$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$,

所以$(a+4b+9c)\cdot\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\geqslant\left(\sqrt{a\cdot\dfrac{1}{a}}+\sqrt{4b\cdot\dfrac{1}{b}}+\sqrt{9c\cdot\dfrac{1}{c}}\right)^2=36$. ………………………… 3 分

当且仅当$\dfrac{a}{\frac{1}{a}}=\dfrac{4b}{\frac{1}{b}}=\dfrac{9c}{\frac{1}{c}}$,即 $a=6,b=3,c=2$ 时,等号成立.

所以 $a+4b+9c\geqslant36$.

故 $a+4b+9c$ 的最小值为 36. …………………………………………………………………… 5 分

(2)因为 a,b,c 均为正实数,

所以由基本不等式可知,$b+c\geqslant2\sqrt{bc}$,$a+c\geqslant2\sqrt{ac}$,$a+b\geqslant2\sqrt{ab}$. …………………………………… 7 分

所以$\dfrac{b+c}{\sqrt{a}}+\dfrac{a+c}{\sqrt{b}}+\dfrac{a+b}{\sqrt{c}}\geqslant\dfrac{2\sqrt{bc}}{\sqrt{a}}+\dfrac{2\sqrt{ac}}{\sqrt{b}}+\dfrac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{c}}=\dfrac{2\sqrt{abc}}{a}+\dfrac{2\sqrt{abc}}{b}+\dfrac{2\sqrt{abc}}{c}=2\sqrt{abc}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)=2\sqrt{abc}$.

…………………………………………………………………………………………………… 9 分

当且仅当 $a=b=c=3$ 时,等号成立.

故$\dfrac{b+c}{\sqrt{a}}+\dfrac{a+c}{\sqrt{b}}+\dfrac{a+b}{\sqrt{c}}\geqslant2\sqrt{abc}$. ………………………………………………………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。