

2020-2021 学年度第二学期期末学业水平检测

高二数学试题

本试卷共 4 页, 22 小题. 满分 150 分. 考试用时 120 分钟.

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上, 并将条形码粘贴在答题卡指定位置上.
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号. 回答非选择题时, 将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后, 请将答题卡上交.

一、单项选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 A, B, C 满足: $A \cup B = B$, $B \cap C = B$, 则下列结论一定正确的是

- A. $A \cap C = A$ B. $A \cap B = B$
C. $A \cup B = C$ D. $A \cup C = B$

2. “ $a > 2$ ”是“函数 $f(x) = a^x + \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增”的

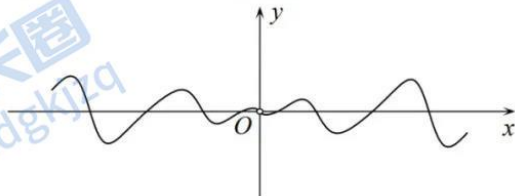
- A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件
C. 充要条件 D. 既非充分也非必要条件

3. 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_5 = S_2 + a_{11}$, 且 $a_1 = 1$, 则 $S_8 =$

- A. 42 B. 56 C. 64 D. 82

4. 已知函数 $f(x)$ 的部分图象如图所示, 则 $f(x)$ 的解析式可能为

- A. $f(x) = \frac{\ln|x|}{2 + \cos x}$
B. $f(x) = \frac{2 - \ln|x|}{\sin x}$
C. $f(x) = \cos x \cdot \ln|x|$
D. $f(x) = \sin x \cdot \ln|x|$



5. 在天文学中, 天体的明暗程度可以用星等或亮度来描述, 两颗星的星等与亮度满足

$$m_2 - m_1 = \frac{5}{2} \lg \frac{E_1}{E_2},$$

其中星等为 m_k 的星的亮度为 $E_k (k=1, 2)$. 已知太阳的星等是 -26.7 , 天

狼星的星等是 -1.45 , 则太阳与天狼星的亮度的比值为

- A. $10^{10.1}$ B. 10.1 C. $\lg 10.1$ D. $10^{-10.1}$

6. 函数 $f(x) = x^3 - 2021x + 1$ 图象的对称中心为

- A. $(0, 0)$ B. $(1, 0)$ C. $(0, 1)$ D. $(1, 1)$

7. 已知 $a = 2^{-\frac{1}{2}}$, $b = \log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{5}$, $c = \log_2 \frac{8}{3}$, 则

- A. $c < b < a$ B. $a < c < b$ C. $a < b < c$ D. $b < a < c$

8. 已知函数 $f(x)$ 为偶函数, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = \ln(-x) + 3x$, 则曲线 $y = f(x)$ 上的点到直线 $y = -2x + 1$ 的最小距离为

- A. 1 B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

二、多项选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知随机变量 $X \sim N(3, 2^2)$, $Y \sim B(10, 0.6)$, 则

- A. $D(X) = 2$ B. $E(Y) = 6$
C. $P(X < 5) = 0.84135$ D. $D(Y) = 2.5$

附: 随机变量 ξ 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < \xi < \mu + \sigma) = 0.6827$,
 $P(\mu - 2\sigma < \xi < \mu + 2\sigma) = 0.9545$.

10. 设全集 $U = \mathbb{R}$, 集合 $A = \{y | y = x^{-2} + 2\}$, 集合 $B = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0, x \in \mathbb{R}\}$, 则

- A. $A \cap B = (2, 3)$ B. $A \cup B = [2, +\infty)$
C. $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) = [3, +\infty)$ D. $A \cup (\complement_{\mathbb{R}} B) = \mathbb{R}$

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_n + a_{n+1} = 3n$, $n \in \mathbb{N}^*$, 则下列说法正确的是

- A. $a_6 = 8$ B. $\{a_{2n}\}$ 是等差数列
C. $S_{20} = 300$ D. $a_{2n} - a_{2n-1} = 3$

12. 已知函数 $f(x) = e^x - \cos^2 x$, 则下列结论正确的是

- A. $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增 B. $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上单调递减
C. $\forall x_0 \geq 0, f(x_0) \geq 0$ D. $\exists x_0 < 0, f(x_0) < 0$

三、填空题: 本大题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. $(\sqrt{x} - \frac{x}{2})^4$ 展开式中 x^3 的系数为_____.

14. 已知函数 $f(x) = -x^2 + ax + 1 - \ln x$, 若 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上是减函数, 则实数 a 的最大值为_____.

15. 给出一个满足以下条件的函数 $f(x) =$ _____.

- ① $f(x)$ 的定义域是 $\mathbb{R}$, 且其图象是一条连续不断的曲线;
② $f(x)$ 是偶函数;
③ $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 不是单调函数;
④ $f(x)$ 有无数个零点.

高一数学试题

第 2 页 (共 4 页)

16. O 为平面直角坐标系 xOy 的坐标原点, 点 $W_0(2,0)$. 在 x 轴正半轴上依次取 OW_0 中点 W_1 , OW_1 中点 W_2 , OW_2 中点 W_3 , ..., OW_n 中点 W_{n+1} , 记 $|OW_n| = a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$. 则 (1) 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n =$ _____; (2) 记 $c_n = n^2 a_n$, 数列 $\{c_n\}$ 的最大值为 _____.
(第一空 2 分, 第二空 3 分)

四、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

在 “① $a_{n+1} > a_n$, $a_2 a_9 = 51$, $a_4 + a_7 = 20$; ② $S_5 = 25a_1$, $a_5 = 3$; ③ $S_n = n^2$ ” 三个条件中任选一个, 补充到下面问题中, 并解答.

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 _____, $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (12 分)

阿根廷球员马拉多纳曾经是上个世纪最伟大的足球运动员之一, 其精湛的足球技术在几十年当中始终无人超越. 科学家通过电脑计算发现: 马拉多纳在高速运动、高强度对抗、视角受限的情况下, 传球和助攻有高达 90% 与电脑计算的最佳路线一样! 为纪念 “球王” 马拉多纳, 某地区举行了系列足球运动推广活动.

(1) 受推广活动的影响, 该地区球迷观看足球联赛的热情持续高涨, 据统计相关轮次观看联赛的球迷人数 y (单位: 人) 如下表:

轮次 x	1	3	4	5	7
观看的人数 y	1300	3300	4200	5200	7000

现建立该地区观看球赛的人数 y 与轮次 x 的线性回归模型: $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$. 根据该模型预测从第几轮次开始该地区观看球赛的人数 y 超过 10000 人?

(2) 为了参加该地区举行的 “花式足球大赛”, 某球队需要从甲、乙所在的 6 名运动员中选三名队员参赛. 求在甲被选中的条件下, 乙也被选中的概率.

附: 回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式和参考数据:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}; \hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}; \sum_{i=1}^5 x_i y_i = 103000.$$

19. (12 分)

已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2} = 4(a_{n+1} - a_n)$, $a_1 = 1, a_2 = 4$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 证明: 数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ 为等比数列;

(2) 记 $b_n = \frac{a_n}{2^n}$, 证明数列 $\{b_n\}$ 为等差数列, 并求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n ;

20. (12分)

已知函数 $f(x) = \frac{ax^3}{3} - \frac{x^2}{2}$, $a \geq 0$.

- (1) 若 $a=1$, 求函数 $f(x)$ 在 $[-1, 2]$ 上的最大值和最小值;
- (2) 求函数 $f(x)$ 的极值点.

21. (12分)

为治疗病毒 Y 引发的疾病, 某医药公司研发了一种新药 W , 为了解 W 的药效, 进行“双盲”对比试验, 统计得到如下数据列联表:

	使用药 W 人数	未使用药 W 人数	总计
治愈人数	48	32	80
未治愈人数	2	18	20
总计	50	50	100

- (1) 依据 $\alpha = 0.001$ 的独立性检验, 能否认为使用药 W 与治愈病毒 Y 引发的疾病有关联?
- (2) 假设该药的治愈率为 80%, 该公司生产了一批该药共 100 份赠予某医院, 该医院对于赠药有这样的接受规定: 随机选择 4 份该药给 4 名患者试用, 如果治愈患者数量少于 3 名, 则拒绝接受整批药物. 求该批药物被拒绝的概率;
- (3) 已知该地区某医院收治的 $2k$ ($k \geq 3, k \in \mathbb{N}^*$) 名病毒 Y 感染者使用该药 W 治疗, 需要通过被治疗者血液样本检测后确定是否治愈, 若样本为阴性说明已经治愈, 若样本为阳性说明未治愈. 如果将样本混合后检测为阴性则说明每份样本均为阴性, 如果将样本混合后检测为阳性则说明其中至少一份样本为阳性, 样本之间是否呈阳性相互独立. 假设该药治愈的概率 $p = 0.91$. 现将 $2k$ 份样本均分成两组进行检测, 若任何一组为阳性则对该组每份逐一检测. 当 $k=10$ 时, 预测检测次数是否小于 15 次?

附: 参考公式及数据:

$$\textcircled{1} \chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, n = a+b+c+d.$$

α	0.100	0.050	0.010	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	10.828

$$\textcircled{2} 0.91^{10} \approx 0.39$$

22. (12分)

已知函数 $f(x) = e^x - a[\ln(1+x) + \ln a + 1]$ ($a > 0$).

- (1) 当 $a=1$ 时, 证明: $f(x) \geq 0$;
- (2) 若 $f(x)$ 有且仅有两个零点 x_1, x_2 , 求实数 a 的取值范围, 并证明 $x_1 x_2 < 0$.

2020-2021 学年度第二学期期末学业水平检测高二数学参考答案

一、单项选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。

1-8: AACD ACCB

二、多项选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

9. BC; 10. AC; 11. ABC; 12. ACD

三、填空题: 本大题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. $\frac{3}{2}$; 14. 3; 15. $x \sin x$; 16. (1) $\frac{1}{2^{n-1}}$; (2) $\frac{9}{4}$;

四、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

解: (1) 若选择①,

由 $a_2 a_9 = 51$ 与 $a_4 + a_7 = a_2 + a_9 = 20$

解得: $\begin{cases} a_2 = 3 \\ a_9 = 17 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_2 = 17 \\ a_9 = 3 \end{cases}$ (由于 $a_{n+1} > a_n$, 舍去) 2 分

设公差为 d , 则 $\begin{cases} a_2 = a_1 + d = 3 \\ a_9 = a_1 + 8d = 17 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 2 \end{cases}$ 4 分

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n - 1$ 5 分

若选择②,

设公差为 d , 由 $S_5 = 25a_1$, 得 $5a_3 = 25a_1$; $a_2 = a_1 + d = 3$ 2 分

则 $\begin{cases} a_1 + 2d = 5a_1 \\ a_1 + d = 3 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 2 \end{cases}$ 4 分

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n - 1$ 5 分

若选择③,

因为 $a_n = \begin{cases} S_1, & n = 1 \\ S_n - S_{n-1}, & n \geq 2 \end{cases}$ 2 分

解得 $a_n = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 2n - 1, & n \geq 2 \end{cases}$ 4 分

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n - 1$ 5 分

(2) 由题意得: $b_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$ 6 分

所以 $T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n$

$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$ 8 分

$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1}$ 10 分

18. (12 分)

解: (1) 由已知可得: $\bar{x} = \frac{1+3+4+5+7}{5} = 4$, $\bar{y} = 4200$ 1 分

高二数学答案 第 1 页 (共 5 页) (用数学的眼光观察世界, 用数学的思维分析世界, 用数学的语言描述世界)

$$\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 103000, \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 1^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 7^2 = 100, \dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i y_i - 5\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^5 x_i^2 - 5\bar{x}^2} = \frac{103000 - 84000}{100 - 5 \times 4^2} = \frac{19000}{20} = 950 \dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } a = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 4200 - 950 \times 4 = 400, \text{ 所以 } \hat{y} = \hat{b}x + a = 950x + 400 \dots 5 \text{ 分}$$

当 $y = 950x + 400 > 10000$ 时, $x \geq 11$

所以估计第11轮联赛观看比赛的人数 y 超过10000人 $\dots 6 \text{ 分}$

(2) 设甲被选中为事件 A , 乙被选中为事件 B $\dots 7 \text{ 分}$

$$\text{由题意可知: } P(A) = \frac{C_5^2}{C_6^3} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \dots 8 \text{ 分}$$

$$P(AB) = \frac{C_4^1}{C_6^3} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \dots 10 \text{ 分}$$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5} \dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{所以在甲被选中的条件下, 乙也被选中的概率为 } \frac{2}{5} \dots 12 \text{ 分}$$

19. (12 分)

解: (1) 因为 $a_{n+2} = 4(a_{n+1} - a_n)$, 所以 $a_{n+2} - 2a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 2a_n)$ $\dots 1 \text{ 分}$

又因为 $a_2 - 2a_1 = 2 \neq 0$ $\dots 2 \text{ 分}$

所以, 数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ 是以2为首项, 以2为公比的等比数列 $\dots 3 \text{ 分}$

所以, $a_{n+1} - 2a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$ $\dots 4 \text{ 分}$

(2) 证明: 因为 $a_{n+1} - 2a_n = 2^n$,

$$\text{可得 } b_{n+1} - b_n = \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{a_{n+1} - 2a_n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \dots 7 \text{ 分}$$

所以, 数列 $\{b_n\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项, 以 $\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列 $\dots 8 \text{ 分}$

$$\text{所以, } b_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times (n-1) = \frac{n}{2} \dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } b_n = \frac{a_n}{2^n} = \frac{n}{2}, \text{ 所以 } a_n = n2^{n-1} \dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } S_n = 1 \times 2^0 + 2 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + \dots + n \times 2^{n-1},$$

$$2S_n = 1 \times 2^1 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \dots + (n-1) \times 2^{n-1} + n \times 2^n$$

$$\text{两式作差得: } -S_n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} - n2^n = \frac{1-2^n}{1-2} - n2^n \dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{所以, } S_n = (n-1)2^n + 1 \dots 12 \text{ 分}$$

高一数学答案 第 2 页 (共 5 页) (田勤学的眼光审视世界 田勤学的思维分析世界 田勤学的语言描述世界)

20. (12 分)

解: (1) 当 $a=1$ 时, $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}$, $f'(x)=x^2-x=x(x-1)$ 1 分

当 $f'(x)=0$ 时, 解得: $x=0$ 或 $x=1$ 2 分

所以, 当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表所示

x	-1	(-1,0)	0	(0,1)	1	(1,2)	2
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\frac{5}{6}$	单调 递增	极大值 0	单调 递减	极小值 $-\frac{1}{6}$	单调 递增	$\frac{2}{3}$

..... 5 分

所以, 函数 $f(x)$ 在 $[-1,2]$ 上的最大值为 $\frac{2}{3}$, 最小值为 $-\frac{5}{6}$ 6 分

(2) 当 $a=0$ 时, $f(x)=-\frac{x^2}{2}$, 存在唯一极大值点 $x=0$ 7 分

当 $a>0$ 时, $f'(x)=ax^2-x=ax(x-\frac{1}{a})$ 8 分

由 $f'(x)=0$ 解得: $x=0$ 或 $x=\frac{1}{a}$

所以当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增

当 $x \in (0, \frac{1}{a})$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调递减 9 分

当 $x \in (\frac{1}{a}, +\infty)$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递增 10 分

所以, $f(x)$ 的极大值点 $x=0$, 极小值点 $x=\frac{1}{a}$ 11 分

综上: 当 $a=0$ 时: $f(x)=-\frac{x^2}{2}$, 存在唯一极大值点 $x=0$

当 $a>0$ 时, $f(x)$ 的极大值点 $x=0$, 极小值点 $x=\frac{1}{a}$ 12 分

21. (12 分)

解: (1) 由题知: $\chi^2 = \frac{100(48 \times 18 - 2 \times 32)^2}{50 \times 50 \times 80 \times 20} = 16 > 10.828 = \chi_{0.001}^2$ 2 分

依据 $\alpha=0.001$ 的独立性检验, 认为使用药 W 与治愈病毒 Y 引发的疾病有关联 3 分

(2) 由题知, 4 名患者中治愈的人数 $\xi \sim B(4, 0.8)$ 4 分

所以该批药物被拒绝的概率 $P=1-P(\xi=3)-P(\xi=4)$

$$=1-C_4^3(0.8)^3 \times 0.2 = 1-2 \times 0.8^4 = 0.1808$$
 6 分

(3) 设检测的次数为 X , 由题知 X 的可能取值为: $2, 2+k, 2+2k$;

$$P(X=2)=p^{2k}$$
 7 分

$P(X=2+k)=C_2^k p^k (1-p)^{2-k}$ 8 分
 $P(X=2+2k)=(1-p)^{2k}$ 9 分
 所以 $E(X)=2p^{2k}+(4+2k)p^k(1-p)^{2-k}+(2+2k)(1-p)^{2k}=2k(1-p)^k+2$ 11 分
 因为 $k=10$, $p=0.91$
 所以 $E(X)-15=20(1-0.91^{10})-13<0$
 所以可以预测检测次数小于 15 次 12 分

22. (12 分)

解: (1) 当 $a=1$ 时, $f(x)=e^x-\ln(1+x)+1$, $f'(x)=e^x-\frac{1}{1+x}$ ($x>-1$) 1 分
 因为 $f'(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增, 且 $f'(0)=0$ 2 分
 所以, 当 $x\in(-1,0)$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 上单调递减
 当 $x\in(0,+\infty)$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增 3 分
 所以 $f(x)\geq f(x)_{\min}=f(0)=0$ 4 分

(2) 由题知: $f'(x)=e^x-\frac{a}{1+x}$ ($x>-1$), 令 $g(x)=f'(x)$,
 则 $g'(x)=e^x+\frac{a}{(1+x)^2}>0$, 所以 $f'(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增; 5 分
 当 $a=1$ 时, 由 (1) 知: $f(x)$ 只有一个零点, 不合题意 6 分
 当 $0<a<1$ 时,

因为 $f'(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增; 且 $f'(0)=1-a>0$, $f'(a-1)=e^{a-1}-1<0$
 故存在 $x_0\in(-1,0)$, 使得 $f'(x_0)=0$, 即 $e^{x_0}=\frac{a}{1+x_0}$, $\ln(1+x_0)=\ln a-x_0$ 7 分

所以, 当 $x\in(-1,x_0)$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 在区间 $(-1,x_0)$ 上单调递减
 当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 在区间 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增

所以 $f(x)\geq f(x_0)=e^{x_0}-a\ln(1+x_0)-a\ln a-a=\frac{a}{1+x_0}+ax_0-2a\ln a-a$

所以 $f(x_0)=\frac{a}{1+x_0}+a(1+x_0)-2a\ln a-2a>2\sqrt{\frac{a}{1+x_0}\times a(1+x_0)}-2a\ln a-2a$
 $=-2a\ln a>0$

所以 $f(x)$ 没有零点, 不合题意 8 分
 当 $a>1$ 时, 因为 $f'(x)$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 上单调递增,

且 $f'(0)=1-a<0$, $f'(\ln a)=e^{\ln a}-\frac{a}{1+\ln a}=a(1-\frac{1}{1+\ln a})>0$

所以存在 $t\in(0,\ln a)$ 满足 $f'(t)=0$

所以, 当 $x\in(-1,t)$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 在区间 $(-1,t)$ 上单调递减

当 $x\in(t,+\infty)$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 在区间 $(t,+\infty)$ 上单调递增

所以 $f(x)\geq f(t)=e^t-a\ln(1+t)-a\ln a-a=\frac{a}{1+t}+at-2a\ln a-a$

$$\begin{aligned} \text{又 } f(t) &= \frac{a}{1+t} + a(1+t) - 2a \ln a - 2a < \frac{a}{1+\ln a} + a(1+\ln a) - 2a \ln a - 2a \\ &= a\left(\frac{1}{1+\ln a} - \ln a - 1\right) < 0 \dots\dots\dots 9 \text{ 分} \end{aligned}$$

易证: $x-1 > \ln x$

$$\begin{aligned} \text{所以 } f(5a) &= e^{5a} - a[\ln(1+5a) + \ln a + 1] > e^{5a+2\ln a} - a(5a+a) \\ &= e^{3a} \cdot e^{2\ln a} - 6a^2 = a^2(e^{3a} - 6) > 0 \dots\dots\dots 10 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\text{又因为 } f\left(\frac{1}{ae} - 1\right) = e^{\frac{1}{ae}-1} > 0 \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

所以 $a > 1$ 时, $f(x)$ 有且仅有两个零点 x_1, x_2

设 $x_1 < x_2$, 且 $f(0) = 1 - a(1 + \ln a) < 0$

$$\text{则 } x_1 \in \left(\frac{1}{ae} - 1, 0\right), x_2 \in (0, 5a), \text{ 所以 } x_1 x_2 < 0 \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

注 1: 也可以通过其他方式解决“当 $a > 1$ 时, $f(?) > 0$ ”的问题, 如:

$$f(x) = e^x - a[\ln(1+x) + \ln a + 1] > x^2 - a(x+a) > 0 \text{ 解得: } x > \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)a$$

说明: 当 $x > \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)a$ 时, $f(x) > 0$! (须再证: $e^x > x^2$)

这是一种“强目的性放缩”, 即通过放缩“去超越化”并发展成二次问题。

注 2: 本题能否拓展? 如: $x_1 + x_2 > 0$?

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq**。



微信搜一搜

Q 齐鲁家长圈

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索