

绝密★启用前

长沙一中 长郡中学

师大附中 雅礼中学

2020 届高三四校(线上)联考

数学(理科) 2020.2

命题学校：雅礼中学

审题学校：师大附中

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、考生号、座号填写在相应位置，认真核对条形码上的姓名、考生号和座号，并将条形码粘贴在指定位置上。
2. 选择题答案必须使用 **2B** 铅笔(按填涂样例)正确填涂；非选择题答案必须使用 **0.5** 毫米黑色签字笔书写，字体工整、笔迹清楚。
3. 请按照题号在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。保持卡面清洁，不折叠、不破损。

一.选择题：本大题共 **12** 小题，每小题 **5** 分，共 **60** 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{N} | -x^2 + x + 2 \geq 0\}$ ，则满足条件 $A \cup B = A$ 的集合 B 的个数为

- A. 3 B. 4 C. 7 D. 8

2. 已知 i 为虚数单位， $a, b \in \mathbb{R}$ ，复数 $\frac{1+i}{2-i} - i = a + bi$ ，则 $a - bi =$

- A. $\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$ B. $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ C. $\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$ D. $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$

3. 已知 $A(1, 2), B(2, 3), C(-1, m)$ ，若 $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}|$ ，则 $\overrightarrow{AC}^2 =$

- A. 6 B. $2\sqrt{5}$ C. 16 D. 20

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1} (n \geq 2)$ ， $a_4 \cdot a_8 = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$ ，且 $a_4 > 0$ ，则 $\tan\left(\frac{a_6}{3} \cdot \pi\right)$

=

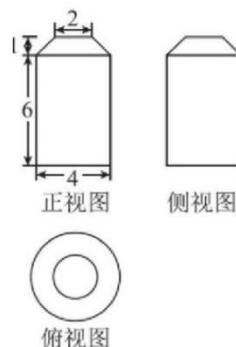
数学(理科)试题(第 1 页, 共 8 页)

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $-\sqrt{3}$ D. $\sqrt{3}$

5. 将函数 $f(x) = 2\sin \pi x - 1$ 的图象向左平移 φ ($0 < \varphi < \frac{1}{2}$) 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象, 若使 $|f(a) - f(b)| = 4$ 成立的 a, b 有 $|a - b|_{\min} = \frac{3}{4}$, 则下列直线中可以是函数 $y = g(x)$ 图像的对称轴的是

- A. $x = \frac{1}{4}$ B. $x = \frac{1}{2}$ C. $x = \frac{3}{4}$ D. $x = \frac{5}{4}$

6. 《海岛算经》中有这样一个问题, 大意为: 某粮行用芦席围成一个粮仓装满米, 该粮仓的三视图如图所示(单位: 尺, 1 尺 \approx 0.33 米), 已知 1 斛米的体积约为 1.62 立方尺, 圆周率约为 3, 则估算出该粮仓存放的米约为



- A. 43 斛
B. 45 斛
C. 47 斛
D. 49 斛

7. 已知点 G 在 $\triangle ABC$ 内, 且满足 $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + 4\overrightarrow{GC} = \mathbf{0}$, 现在 $\triangle ABC$ 内随机取一点, 此点取自 $\triangle GAB$ 、 $\triangle GAC$ 、 $\triangle GBC$ 的概率分别记为 P_1 、 P_2 、 P_3 , 则

- A. $P_1 = P_2 = P_3$ B. $P_3 > P_2 > P_1$ C. $P_1 > P_2 > P_3$ D. $P_2 > P_1 > P_3$

8. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 $F(c, 0)$, 点 A 、 B 方分别在直线

$x = -\frac{a^2}{c}$ 和双曲线 C 的右支上, 若四边形 $OABF$ (其中 O 为坐标原点) 为菱形且其面积为 $3\sqrt{15}$, 则 $a =$

- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{5}$ C. 2 D. $\sqrt{6}$

9. 当 x 为实数时, $\text{trunc}(x)$ 表示不超过 x 的最大整数, 如 $\text{trunc}(3.1) = 3$. 已知函数 $f(x) = |\text{trunc}(x)|$ (其中 $x \in \mathbb{R}$), 函数 $g(x)$ 满足 $g(x) = g(6-x)$,

$g(1+x) = g(1-x)$ 且 $x \in [0, 3]$ 时, $g(x) = |x^2 - 2x|$, 则方程 $f(x) = g(x)$ 的实根的个数为

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

10. 对四位数 \overline{abcd} ($1 \leq a \leq 9, 0 \leq b, c, d \leq 9$), 若 $a > b, b < c, c > d$, 称 \overline{abcd} 为“吉祥数”, 则“吉祥数”的个数为

- A. 1695 B. 1696 C. 1697 D. 1698

11. $\triangle ABC$ 中, 所有内角都不是钝角, 有以下命题:

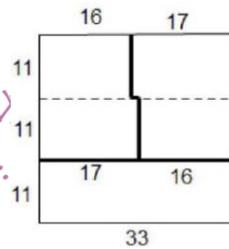
- ① $\sin 2A = \sin 2B \Leftrightarrow A = B$; ② $\sin 2A > \sin 2B \Leftrightarrow A < B$;
③ $\cos 2A = \cos 2B \Leftrightarrow A < B$; ④ $\sin A \geq \cos B$

其中正确命题的个数是

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

12. 如图所示, 将 33×33 方格纸中每个小方格染三种颜色之一, 使得每种颜色的小方格的个数相等. 若相邻两个小方格的颜色不同, 称他们的公共边为“分割边”, 则分割边条数的最小值为

- A. 33
B. 56
C. 64
D. 78

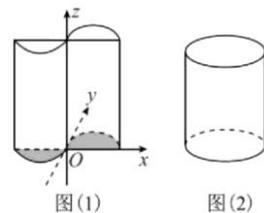


二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 若 $(\frac{1}{2x^2} - x)^n$ 的展开式中第 $n+1$ 项为常数项, 则 $\frac{r}{n} = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 我国古代数学家祖暅提出原理: “幕势既同, 则积不容异”. 其中“幕”是截面积, “势”是

几何体的高. 原理的意思是: 夹在两个平行平面间的两个几何体, 被任一平行于这两个平行平面的平面所截, 若所截的两个截面的面积恒相等, 则这两个几何体的体积相等. 如图(1),



函数 $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{2}, x \in [-2, 0) \\ \sqrt{1 - (x-1)^2}, x \in (0, 2] \end{cases}$ 的图象与 x 轴围成一个封闭区域 A (阴影部分),

将区域 A (阴影部分) 沿 Z 轴的正方向上移 6 个单位, 得到一个几何体. 现有一个与之等高的底面为椭圆的柱体如图 (2) 所示, 其底面积与区域 A (阴影部分) 的面积相等, 则此柱体的体积为 _____.

15. 已知变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} y \geq 0 \\ x + 2y - 8 \leq 0 \\ 2x + y - 6 \geq 0 \end{cases}$, 在实数 x, y 中插入 7 个实数, 使这 9 个数构成等差数列 $\{a_n\}$ 的前 9 项, 则 $a_1 = x, a_9 = y$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 13 项和的最大值为 _____.

16. 若有且仅有一个正方形, 其中心位于原点, 且其四个顶点在曲线 $y = x^3 + ax$ 上, 则实数 $a =$ _____.

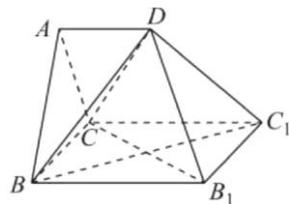
三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

如图, 多面体 $ABC - DB_1C_1$ 是正三棱柱 (底面是正三角形的直棱柱) $ABC - A_1B_1C_1$ 沿平面 DB_1C_1 切除一部分所得, 其中平面 ABC 为原正三棱柱的底面, $BC = CC_1 = 2$,

点 D 为 AA_1 的中点.

- (I) 求证: $BC_1 \perp$ 平面 B_1CD ;
- (II) 求二面角 $C_1 - BD - C$ 的平面角的余弦值.



18. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两焦点与短轴两端点围成面积为 12 的正方形.

- (I) 求椭圆 C 的标准方程;

(II) 我们称圆心在椭圆上运动, 半径为 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ 的圆是椭圆的“卫星圆”. 过原点 O 作

椭圆 C 的“卫星圆”的两条切线, 分别交椭圆 C 于 A, B 两点, 若直线 OA, OB 的斜率为 K_1, K_2 , 当 $k_1+k_2=2\sqrt{10}$ 时, 求此时“卫星圆”的个数.

19. (本小题满分 12 分)

已知首项为 a_1 的数列 $\{a_n\}$ 各项均为正数, 且 $n(a_{n+1}+2a_n)(a_{n+1}-2a_n)=4a_n^2, n \in N^*$

(I) 若数列 $\{b_n\}$ 的通项 b_n 满足 $b_n = a_n^2$, 且 $a_1=1$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n ;

(II) 若数列 $\{c_n\}$ 的通项 c_n 满足 $cn = \frac{b_n}{(4S)^n}$, 前 n 项和为 Q_n , 当数列 $\{c_n\}$ 是等差数列

时, 对任意的 $n \in N^*$, 均存在 $m \in N^*$, 使得 $8a_1^2 Q_n - a_1^4 n^2 = 16cm$ 成立, 求满足条件的所有整数 a_1 构成的集合.

20. (本小题满分 12 分)

高尔顿板是英国生物统计学家高尔顿设计用来研究随机现象的模型, 在一块木板上钉着若干排相互平行但相互错开的圆柱形小木块, 小木块之间留有适当的空隙作为通道, 前面挡有一块玻璃, 让一个小球从高尔顿板上方的通道口落下, 小球在下落的过程中与层层小木块碰撞, 且等可能向左或向右滚下, 最后掉入高尔顿板下方的某一球槽内.

如图所示的小木块中, 上面 7 层为高尔顿板, 最下面一层为改造的高尔顿板, 小球从通道口落下, 第一次与第 2 层中间的小木块碰撞, 以 $\frac{1}{2}$ 的概率向左或向右滚下, 依次经过

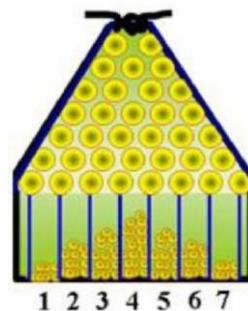


图 2

7 次与小木块碰撞, 最后掉入编号为 $1, 2, \dots, 6$ 的球槽内. 例如

小球要掉入 3 号球槽, 则在前 6 次碰撞中有 2 次向右 4 次向左滚到第 7 层的第 3 个空隙处, 再以 $\frac{1}{2}$ 的概率向右滚下, 或在前 6 次碰撞中有 3 次向右 3 次向左滚到第 7

数学(理科)试题(第 5 页, 共 8 页)

层的第 4 个空隙处, 再以 $\frac{1}{2}$ 的概率向左滚下。

(I) 若进行一次高尔顿板试验, 求小球落入第 7 层第 6 个空隙处的概率;

(II) 小明同学在研究了高尔顿板后, 利用该图中的高尔顿板来到社团文化节上进行盈利性“抽奖”活动, 8 元可以玩一次高尔顿板游戏, 小球掉入 X 号球槽得到的奖金为 ξ 元. 其中 $\xi = |20 - 5X|$

(i) 求 X 的分布列:

(ii) 高尔顿板游戏火爆进行, 很多同学参加了游戏, 你觉得小明同学能盈利吗?

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^2 + ax - \frac{a}{x} (a \in R)$

(I) 当 $a = 1$ 且 $x > -1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 当 $a > \frac{e}{e^2 + 1}$ 时, 若函数 $g(x) = f(x) - x^2 - \ln x$ 的两个极值点分别为 x_1, x_2 , 证

明: $0 < g(x_1) - g(x_2) < \frac{4}{e^2 + 1}$

请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分。作答时用 2B 铅笔在答题卡上把所选题号涂黑。

22. (本小题满分 10 分) 选修 4—4: 坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos \alpha \\ y = 6 + \sqrt{2} \sin \alpha \end{cases} (\alpha \text{ 为参数})$, 以坐标原

点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为

$$\rho = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{1 + 9 \sin^2 \theta}}$$

数学(理科)试题(第 6 页, 共 8 页)

(I)求曲线 C_1 的普通方程和 C_2 的直角坐标方程;

(II)若 M, N 分别为曲线 C_1 和曲线 C_2 上的动点, 求 $|MN|$ 的最大值.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4—5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |2x-7| + |2x-5|$

(I)解不等式 $f(x) \geq 6$;

(II)设函数 $f(x)$ 的最小值为 m , 已知正实数 a, b , 且 $k = \max \left\{ \frac{1}{a+b}, \frac{a^2+b^2}{a+b} \right\}$, 证

明: $k^2 m \geq 1$

自主招生在线创始于 2014 年, 致力于提供自主招生、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站

(www.zizs.com) 和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长, 在全国自主招生、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注**自主选拔在线**官方微信号: **zizzsw**。



识别二维码, 快速关注

福利:

- 1、关注后回复“答题模板”, 即可获得高中 9 科答题模板资料
- 2、回复“清北华五”, 即可获得清北华东五校特殊选拔考试模式及真题

数学(理科)试题(第 7 页, 共 8 页)

