

常州市教育学会学业水平监测

高三数学

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$ ， $B = \{x | \ln x - 2 < 0\}$ ，则 $A \cap B =$

- A. \emptyset B. $\{1\}$ C. $\{2\}$ D. $\{1, 2\}$

【答案】D

【解析】由集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$ 可以得出 $A = \{1, 2\}$ ，

由 $B = \{x | \ln x - 2 < 0\}$ 可以得出 $B = \{x | 0 < x < e^2\}$ ，所以答案是 D。

2. 已知 a, b 是平面内两个向量，且 $a \neq 0$ 。“ $b = 0$ ”是“ $|a| = |a + b|$ ”的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】当 a, b 夹角为 120° ， $|a| = |a + b|$ 亦成立，故选 A。

3. 函数 $f(x) = \sin 2x + \tan x$ 的最小正周期是

- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. π D. 2π

【答案】C

【解析】 $f(x + \pi) = \sin(2x + 2\pi) + \tan(x + \pi) = \sin 2x + \tan x = f(x)$ ，故选 C。

4. 已知随机变量 $X \sim B(6, p)$ ， $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，且 $P(Y \geq 2) = \frac{1}{2}$ ， $E(X) = E(Y)$ ，则 $p =$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{6}$

【答案】B

【解析】由题意可知， $E(Y) = \mu = 2$ ，所以 $E(X) = 6p = 2$ ，解得 $p = \frac{1}{3}$ 。

5. 已知点 $A(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ ， $B(1, -3)$ 是圆 $C: x^2 + y^2 = 10$ 上两点，动点 P 从 A 出发，沿着圆周按

逆时针方向走到 B，其路径长度的最小值为

- A. $\frac{\sqrt{10}}{4}\pi$ B. $\frac{3\sqrt{10}}{4}\pi$ C. $\frac{5\sqrt{10}}{4}\pi$ D. $\frac{7\sqrt{10}}{4}\pi$

【答案】C

【解析】记 $\angle Aox = \alpha$ ，则 $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{2}$ ， $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，记 $\angle Box = \beta$ ，则 $\sin \beta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ ， $\cos \beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$ ，

则 $\cos(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{\sqrt{10}}{10} - \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{3\sqrt{10}}{10} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，即 $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$ ，

路径长等于 $\frac{5\pi}{4} \cdot \sqrt{10} = \frac{5\sqrt{10}\pi}{4}$ ，故选 C。

6. 已知 $(1-x)^{2021} = a_0 + a_1x + \dots + a_{2021}x^{2021}$ ，则系数 $a_0, a_1, \dots, a_{2021}$ 中最小的是

- A. a_0 B. a_{1010} C. a_{1011} D. a_{2021}

【答案】C

【解析】 $a_n = (-1)^n C_{2021}^n \Rightarrow a_0 = 1, a_{2021} = -1, a_{1010} = C_{2021}^{1010}, a_{1011} = -C_{2021}^{1011} = -C_{2021}^{1010}$ 故 a_{1011} 最小，选 C

7. 小李在 2022 年 1 月 1 日采用分期付款的方式贷款购买一台价值 a 元的家电，在购买一个月后的 2 月 1 日第一次还款，且以后每月的 1 日等额还款一次，一年内还清全部贷款（2022 年 12 月 1 日最后一次还款），月利率为 r 。按复利计算，则小李每个月应还

- A. $\frac{ar(1+r)^{11}}{(1+r)^{11}-1}$ 元 B. $\frac{ar(1+r)^{12}}{(1+r)^{12}-1}$ 元 C. $\frac{ar(1+r)^{11}}{11}$ 元 D. $\frac{ar(1+r)^{12}}{12}$ 元

【答案】A

【解析】设第 n 个月后的待还金额为 a_n ，每个月还款 x ，则 $a_1 = a, a_{12} = 0$ ，且 $a_{n+1} = (r+1)a_n - x$ ，

所以 $\frac{a_{n+1}}{(r+1)^{n+1}} - \frac{a_n}{(r+1)^n} = -\frac{x}{(r+1)^{n+1}}$ ，且 $\frac{a_1}{r+1} = \frac{a}{r+1}, \frac{a_{12}}{(r+1)^{12}} = 0$ ，

由累加法可知， $\frac{a}{r+1} = x \left(\frac{1}{(r+1)^2} + \dots + \frac{1}{(r+1)^{12}} \right)$ ，解得 $x = \frac{ar(r+1)^{11}}{(r+1)^{11}-1}$ 。

8. 已知函数 $y = f(x-1)$ 图象关于点 $(1,0)$ 对称，且当 $x > 0$ 时， $f'(x)\sin x + f(x)\cos x > 0$ ，则下

A. $f(\frac{5\pi}{6}) < -f(\frac{7\pi}{6}) < -f(-\frac{\pi}{6})$

B. $-f(\frac{7\pi}{6}) < f(\frac{5\pi}{6}) < -f(-\frac{\pi}{6})$

C. $-f(-\frac{\pi}{6}) < -f(\frac{7\pi}{6}) < f(\frac{5\pi}{6})$

D. $-f(-\frac{\pi}{6}) < f(\frac{5\pi}{6}) < -f(\frac{7\pi}{6})$

【答案】D

解：由题意知： $f(x)$ 为奇函数

令 $g(x) = f(x)\sin x$ ，则 $g(x)$ 为偶函数

$x > 0$ 时， $g'(x) = f'(x)\sin x + f(x)\cos x > 0$

故 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 递增，则： $g(\frac{7\pi}{6}) > g(\frac{5\pi}{6}) > g(\frac{\pi}{6}) = g(-\frac{\pi}{6})$

即 $f(\frac{7\pi}{6})\sin \frac{7\pi}{6} > f(\frac{5\pi}{6})\sin \frac{5\pi}{6} > f(-\frac{\pi}{6})\sin \frac{-\pi}{6}$

$-\frac{1}{2}f(\frac{7\pi}{6}) > \frac{1}{2}f(\frac{5\pi}{6}) > -\frac{1}{2}f(-\frac{\pi}{6})$

故 $-f(\frac{7\pi}{6}) > f(\frac{5\pi}{6}) > -f(-\frac{\pi}{6})$ ，选D.

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. 如图，用4种不同的颜色，对四边形中的四个区域进行着色，要求有公共边的两个区域不能用同一种颜色，则不同的着色方法数为

A. $A_4^3 \times A_2^1$

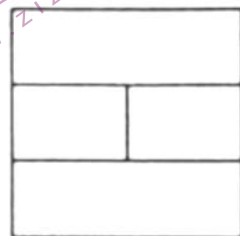
B. $A_4^2 \times A_4^2$

C. $A_4^2 \times (A_2^1)^2$

D. $C_4^1 \times A_3^2 + C_4^2 \times (A_2^2)^2$

【答案】ACD

解：先涂上方三块，再涂下方一块： $A_4^3 C_4^1 = 48$ 种，故选ACD.



(第9题图)

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 2$ ， $a_{n+1} = \frac{1+a_n}{1-a_n}$ ，使 $a_n = -\frac{1}{2}$ 的 n 可以是

A. 2019

B. 2021

C. 2022

D. 2023

【答案】AD

解： $a_2 = -3$ ， $a_3 = -\frac{1}{2}$ ， $a_4 = \frac{1}{3}$ ， $a_5 = 2, \dots$

故 $\{a_n\}$ 为周期数列，周期为4， $a_{4n-1} = -\frac{1}{2}$ ，故选AD.

11. 已知函数 $f(x) = \ln(x - \frac{\pi}{4}) + \sin x + \cos x$ ，下列说法正确的有

- A. 函数 $f(x)$ 是周期函数
- B. 函数 $f(x)$ 有唯一零点
- C. 函数 $f(x)$ 有无数个极值点
- D. 函数 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ 上不是单调函数

【答案】CD

解：显然 $f(x)$ 不是周期函数，A 错误；

$$f'(x) = \frac{1}{x - \frac{\pi}{4}} - \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}), \quad x > \frac{\pi}{4}$$

$x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ 时， $x - \frac{\pi}{4} \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，显然 $f'(x)$ 递减

$$x \rightarrow \frac{\pi}{4} \text{ 时, } f'(x) \rightarrow +\infty, \quad f'(\frac{3\pi}{4}) = \frac{2}{\pi} - \sqrt{2} < 0$$

$f'(x)$ 在 $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ 上恰有一个零点，设为 x_0

$f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{4}, x_0)$ 递增， $(x_0, \frac{3\pi}{4})$ 递减，D 正确；

$$x \rightarrow \frac{\pi}{4} \text{ 时, } f(x) \rightarrow -\infty, \quad f(\frac{3\pi}{4}) = \ln \frac{\pi}{2} > 0, \quad f(\pi) = \ln \frac{3\pi}{4} - 1 < 0$$

故 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ 和 $(\frac{3\pi}{4}, \pi)$ 上均有零点，B 错误；

因此，选 CD.

12. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 $3a$ ，点 M 是棱 BC 上的定点，且 $BM = 2CM$ 。点 P 是棱 C_1D_1 上的动点，则

- A. 当 $PC_1 = \frac{2}{3}a$ 时， $\triangle PAM$ 是直角三角形
- B. 四棱锥 A_1-PAM 的体积最小值为 $\frac{3}{2}a^2$
- C. 存在点 P，使得直线 $BD_1 \perp$ 平面 PAM
- D. 任意点 P，都有直线 $BB_1 \parallel$ 平面 PAM

【答案】AB

解：以A为原点， $\{\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AA}\}$ 为正交基底建立空间直角坐标系，则 $M(3a, 2a, 0)$

选项A: $P(\frac{7a}{3}, 3a, 3a)$, 则 $\overline{PM} = (\frac{2a}{3}, -a, -3a)$, 故 $\overline{AM} \cdot \overline{PM} = 0$ 正确;

选项B: $V_{A-PAM} = V_{P-AM_1} \geq V_{C_1-AM_1} = V_{M-AA_1C_1} = \frac{1}{2} V_{B-AA_1C_1} = \frac{1}{3} V_{C_1-ABA_1} = \frac{1}{9} \frac{9a^2}{2} \cdot 3a = \frac{3a^3}{4}$, 正确;

选项C: BD 与 AM 不垂直, 则 BD 与 AM 不垂直, 故不存在, 错误;

选项D: 显然不平行, 错误;

因此, 选AB.

三、填空题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分.

13. i 是虚数单位, 已知复数 z 满足等式 $\frac{\bar{z}}{i} + \frac{2i}{z} = 0$, 则 z 的模 $|z| =$ _____.

【答案】 $\sqrt{2}$

解: 由题意知: $z\bar{z} = 2$, 则 $|z\bar{z}| = |z|^2 = 2$, 故 $|z| = \sqrt{2}$.

14. 已知 α 为第四象限角, 且 $\tan(\alpha - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $\sin \alpha =$ _____.

【答案】 $-\frac{3\sqrt{21}}{14}$

解: $\tan \alpha = \tan[(\alpha - \frac{\pi}{3}) + \frac{\pi}{3}] = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}}{1 - \frac{3}{2}} = -3\sqrt{3}$

又 α 为第四象限角, 易得: $\sin \alpha = -\frac{3\sqrt{21}}{14}$

15. 已知定义域都是 \mathbf{R} 的两个不同的函数 $f(x), g(x)$ 满足 $f'(x) = g(x)$, 且 $g'(x) = f(x)$. 写出一个符合条件的函数 $f(x)$ 的解析式 $f(x) =$ _____.

【答案】 $f(x) = e^{-x}$

解: $f(x) = e^{-x}$. (答案不唯一)

16. 已知抛物线 $C_1: y^2 = 2px$ 的焦点与双曲线 $C_2: \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1(a > 0)$ 的右焦点 F 重合, 抛物线 C_1

的准线与双曲线 C_2 的渐近线交于点 A, B . 若三角形 FAB 是直角三角形, 则 $p =$, 双曲线 C_2 的离心率 $e =$ _____.

【答案】 $\sqrt{5}, \sqrt{5}$

解: 由题意知: $\frac{p}{2} = \sqrt{a^2 + 1}$, $F(\frac{p}{2}, 0)$

$\triangle FAB$ 为直角三角形, 又显然 $\triangle FAB$ 为等腰三角形

故 $A(-\frac{p}{2}, p)$, $B(-\frac{p}{2}, -p)$, 则 $\frac{1}{a} = 2$, 得: $a = \frac{1}{2}$

故 $p = 2\sqrt{a^2 + 1} = \sqrt{5}$, $e = \sqrt{1 + \frac{1}{a^2}} = \sqrt{5}$.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

某型号机床的使用年数 x 和维护费 y 有下表所示的统计资料:

x /年	2	3	4	5	6
y /万元	2.0	3.5	6.0	6.5	7.0

附:

在线性回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ 中, $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n(\bar{x})^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$, 其中 \bar{x} , \bar{y} 为样本平均值.

求 x , y 的线性回归方程;

某厂该型号的一台机床已经使用了 8 年, 现决定当维护费达到 15 万元时, 更换机床, 请估计到第 11 年结束, 是否需要更换机床?

$$17.(1) \bar{x} = \frac{2+3+4+5+6}{5} = 4, \bar{y} = \frac{2+3.5+6+6.5+7}{5} = 5, \sum_{i=1}^5 x_i y_i = 113, \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 90,$$

$$\text{则 } \hat{b} = \frac{113 - 5 \times 4 \times 5}{90 - 5 \times 16} = 1.3, \hat{a} = 5 - 1.3 \times 4 = -0.2,$$

则线性回归方程为 $y = -0.2 + 1.3x$.

(2) 令 $x = 11$, $y = -0.2 + 1.3 \times 11 = 14.1 < 15$, 则不需要.

18. (12分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2} (n \in \mathbb{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n ;

(2) 求数列 $\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和 T_n .

【解析】

$$(1) S_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad ①$$

$$S_{n+1} = \frac{(n+2)(n+3)}{2} \quad ②$$

$$① - ② \Rightarrow a_{n+1} = n + 2 (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$n=1, S_1 = a_1 = 3 \Rightarrow a_n = \begin{cases} 3, n=1 \\ n+1, n \geq 2 \end{cases}$$

$$(2) n=1, \frac{1}{a_1 a_2} = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$n \geq 2, \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{4}{6} - \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

19. (12分)

已知在四边形 $ABCD$ 中, $AB=7$, $BC=13$, $CD=AD$, 且 $\cos B = \frac{1}{7}$, $\angle BAD = 2\angle BCD$.

(1) 求 $\angle BCA$;

(2) 求 AD .

【解析】(1) 连接 AC , 因为 $\cos B = \frac{1}{7}$, 所以 $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$,

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B = 192$, 即 $AC = 8\sqrt{3}$,

由正弦定理可知, $\frac{AB}{\sin \angle BCA} = \frac{AC}{\sin B}$, 解得 $\sin \angle BCA = \frac{1}{2}$,

因为 $AC > AB$, 所以 $\angle BCA < B$, 即 $\angle BCA$ 为锐角, 所以 $\angle BCA = \frac{\pi}{6}$;

(2) 因为 $CD = AD$, 所以 $\angle DCA = \angle DAC$, 设 $\angle DCA = \angle DAC = \alpha$,

则 $\angle DCB = \alpha + \frac{\pi}{6}$, 所以 $\angle BAD = 2\alpha + \frac{\pi}{3}$, 所以 $\angle BAD = \alpha + \frac{\pi}{3}$,

所以 $\angle BAC + \angle BCA = \alpha + \frac{\pi}{2}$,

因为 $\alpha + \frac{\pi}{2} + B = \pi$, 所以 $\alpha + B = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\cos \alpha = \sin B = \frac{4\sqrt{3}}{7}$,

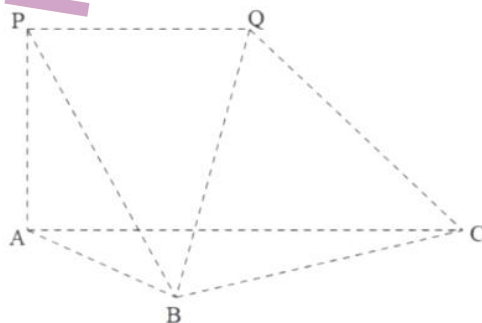
又因为 $\cos \alpha = \frac{AC}{2AD}$, 且 $AC = 8\sqrt{3}$, 所以 $AD = 7$.

20. (12分)

如图, 四棱锥 $B-PACQ$ 中, $BC \perp$ 平面 PAB , 且四边形 $PACQ$ 中, $PQ \parallel AC$, $\angle PAC = \frac{\pi}{2}$, 二面角 $B-AP-Q$ 的大小为 $\frac{\pi}{3}$, 且 $AP = AB = PQ = 1$.

求证: 平面 $PACQ \perp$ 平面 ABC ;

求直线 BQ 于平面 $PACQ$ 所成角的正弦值;



【解析】(1) 因为 $BC \perp$ 平面 PAB , $PA \subset$ 平面 PAB , 所以 $BC \perp PA$,

因为 $\angle PAC = \frac{\pi}{2}$, 所以 $PA \perp AC$,

又 $BC \cap AC = C, BC, AC \subset$ 平面 ABC , 所以 $PA \perp$ 平面 ABC

又因为 $PA \subset$ 平面 $PACQ$, 所以平面 $PACQ \perp$ 平面 ABC ;

(2) 因为 $BA \subset$ 平面 ABC , 且由 (1) 可知, $PA \perp$ 平面 ABC , 所以 $PA \perp AB$,

因为 $PA \perp AC$, 所以 $\angle BAC$ 为二面角 $B-AP-Q$ 的平面角, 即 $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$,

因为 $AB = 1$, 所以 $BC = \sqrt{3}$,

过点 B 作 $BH \perp AC$, 垂足为 H , 连接 HQ ,

因为平面 $PACQ \perp$ 平面 ABC , 平面 $PACQ \cap$ 平面 $ABC = AC$,

$BH \perp AC$, $BH \subset$ 平面 ABC ,

所以 $BH \perp$ 平面 $PACQ$, 所以 $\angle BQH$ 即为直线 BQ 与平面 $PACQ$ 所成的角,

易知 $BH = \frac{\sqrt{3}}{2}, AH = \frac{1}{2}$, 所以 $QH = \sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 所以 $BQ = \sqrt{\frac{5}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{2}$,

所以 $\sin \angle BQH = \frac{BH}{BQ} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

注：本题建系也可.

21. (12分)

已知函数 $f(x) = a^x - x^a (x > 0)$ ，其中 $a > 1$.

- (1) 若曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线平行于 x 轴，求 a 的值；
(2) 当 $a \geq e$ (e 为自然对数的底数) 时，求函数 $f(x)$ 的零点个数并说明理由.

【答案】 (1) $a = e$ ； (2) $a = e$ 时， $f(x)$ 的零点个数是 1； $a > e$ 时， $f(x)$ 的零点个数是 2

解: (1) $f'(x) = a^x \ln a - ax^{a-1}$, $f'(1) = a(\ln a - 1) = 0$

又 $a > 1$, 故 $\ln a - 1 = 0$, 得: $a = e$;

(2) $f(x) = 0$, 即 $a^x = x^a$, 即 $x \ln a = a \ln x$, 即 $\frac{\ln a}{a} \cdot x - \ln x = 0$, $a \geq e$, $x > 0$

令 $t = h(a) = \frac{\ln a}{a}$, $a \geq e$, $h'(a) = \frac{1 - \ln a}{a} \leq 0$

故 $h(a)$ 在 $[e, +\infty)$ 递减, $h(e) = \frac{1}{e}$, $a \rightarrow +\infty$ 时, $h(a) \rightarrow 0$, 故 $t = h(a) \in (0, \frac{1}{e}]$

令 $g(x) = tx - \ln x$, $t \in (0, \frac{1}{e}]$, $f(x)$ 的零点个数即为 $g(x)$ 的零点个数

① $t = \frac{1}{e}$, 即 $a = e$ 时, $g(x) = \frac{1}{e}x - \ln x$, $g'(x) = \frac{x-e}{ex}$

$x \in (0, e)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 递减; $x \in (e, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 递增

$g(x)_{\max} = g(e) = 0$, 故 $g(x)$ 有唯一零点, 即 $f(x)$ 有唯一零点;

② $t \in (0, \frac{1}{e})$, 即 $a > e$ 时, $g'(x) = \frac{tx-1}{x}$, $x > 0$

$x \in (0, \frac{1}{t})$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 递减; $x \in (\frac{1}{t}, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 递增

$g(x)_{\max} = g(\frac{1}{t}) = 1 + \ln t < 0$, $g(1) = t > 0$, $g(\frac{1}{t^2}) = \frac{1}{t} - 2 \ln \frac{1}{t}$

令 $G(x) = x - 2 \ln x$, $x \in (e, +\infty)$, $G'(x) = \frac{x-2}{x} > 0$

$G(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 递增, $G(x) > G(e) = e - 2 > 0$

$t \in (0, \frac{1}{e})$, 则 $\frac{1}{t} > e$, 故 $G(\frac{1}{t}) = \frac{1}{t} - 2 \ln \frac{1}{t} > 0$, 即 $g(\frac{1}{t^2}) > 0$

$g(\frac{1}{t})g(\frac{1}{t^2}) < 0$, $g(\frac{1}{t})g(1) < 0$

故 $g(x)$ 在 $(1, \frac{1}{t})$ 和 $(\frac{1}{t}, \frac{1}{t^2})$ 上各有一个零点

故 $g(x)$ 存在两个零点, 即 $f(x)$ 存在两个零点;

综上, $a = e$ 时, $f(x)$ 的零点个数是 1; $a > e$ 时, $f(x)$ 的零点个数是 2.

22. (12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点坐标为 $F(-2, 0)$, 离心率 $e = \frac{1}{2}$. 点 A 是椭圆上位于

轴上方的一点, 点 $B(1, 0)$, 直线 AF , AB 分别交椭圆于异于 A 的点 M , N .

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 若直线 MN 平行于 x 轴, 求点 A 的横坐标.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$; (2) $-\frac{8}{7}$

解: (1) 设焦距为 $2c$, 由题意知: $c = 2$

$$\text{则 } a = \frac{c}{e} = 4, b^2 = a^2 - c^2 = 12$$

故椭圆 C 的标准方程为: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$;

(2) 设 $A(x, y)$, $y > 0$, MN 平行于 x 轴, 即 $MN \parallel FB$

设 $\overrightarrow{FM} = \lambda \overrightarrow{FA} = (\lambda x + 2\lambda, \lambda y)$, $\lambda < 0$, 则 $\overrightarrow{BN} = \lambda \overrightarrow{BA} = (\lambda x - \lambda, \lambda y)$

则 $M(\lambda x + 2\lambda - 2, \lambda y)$, $N(\lambda x - \lambda + 1, \lambda y)$

MN 平行于 x 轴, 则 $\lambda x + 2\lambda - 2 = \lambda x - \lambda + 1$, 即 $2\lambda x + \lambda - 1 = 0$

$$\begin{cases} 2\lambda x + \lambda - 1 = 0, \lambda < 0 \\ 3x^2 + 4y^2 = 48 \\ 3(\lambda x - \lambda + 1)^2 + 4\lambda^2 y^2 = 48 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{8}{7}, \text{ 即点 } A \text{ 的横坐标为 } -\frac{8}{7}.$$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：[zizzsw](https://www.zizzs.com)。



微信搜一搜

