绝密★启用前

高三数学考试(理科)

(考试时间:120 分钟　试卷满分:150 分)

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|\frac{x-2}{x}\leqslant 0\}$, $B=\{x|1-x>0\}$,则 $A\cap B=$

A. $\{x|1<x<2\}$　　B. $\{x|0<x<1\}$　　C. $\{x|1<x\leqslant 2\}$　　D. $\{x|0\leqslant x<1\}$

2. 双曲线 $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{3}=1$ 的一个焦点坐标为

A. $(0,5)$　　B. $(-5,0)$　　C. $(\sqrt{7},0)$　　D. $(0,-\sqrt{7})$

3. 在 2008 年北京奥运会女子射箭比赛中,中国选手张娟娟连续战胜了三名韩国选手,最终获得了冠军,取得了历史性的突破(射箭比赛根据决赛总成绩的高低来决定胜负). 张娟娟与一名韩国选手在决赛中的射箭成绩如下:

甲	10	7	9	9	9	9	10	9	10	10	9	9
乙	9	10	10	8	8	10	9	8	9	10	8	10

则下列判断正确的是

A. 甲是中国选手,乙是韩国选手

B. 甲射击成绩的众数大于乙射击成绩的众数

C. 甲射击成绩的极差等于乙射击成绩的极差

D. 甲射击成绩的中位数大于乙射击成绩的中位数

4. 已知 a 为函数 $f(x)=2\ln x+\frac{1}{2}x^2-3x$ 的极小值点,则 $a=$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. $\ln 2$

5. 已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,若 $a_2+a_{10}=10$,则 $S_9-S_2=$

A. 30　　B. 35　　C. 40　　D. 45

6. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-1)$, $\boldsymbol{b}=(m,1-m)$, $\boldsymbol{c}=(2m,2)$,若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=$

A. -2　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 2

7. 已知底面边长为1的正四棱柱的各顶点在同一个球面上，若该球的表面积为4π，则该四棱柱的侧面积为

A. 4　　B. $4\sqrt{2}$　　C. $8\sqrt{2}$　　D. $8\sqrt{2}+2$

8. 奥林匹克标志由五个互扣的环圈组成，五环象征五大洲的团结. 五个奥林匹克环总共有8个交点，从中任取3个点，则这3个点恰好位于同一个奥林匹克环上的概率为

A. $\frac{3}{14}$　　B. $\frac{5}{14}$

C. $\frac{3}{7}$　　D. $\frac{1}{7}$

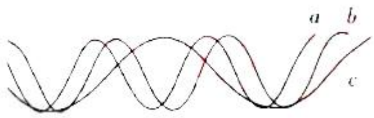
9. 方程$3^{\log_2 x}=\frac{1}{4}$的解为

A. $4^{\log_3 2}$　　B. $2^{\log_3 2}$　　C. $(\frac{1}{2})^{\log_3 2}$　　D. $(\frac{1}{4})^{\log_3 2}$

10. 已知F为抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点，A是抛物线C上一点，以C的顶点为圆心，经过点A的圆与C的准线相切，若$|AF|=\sqrt{5}-1$，则$p=$

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

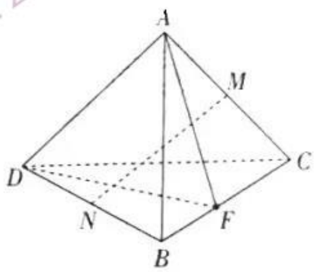
11. 三个函数$f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，$g(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{5})$，$h(x)=\sin x$在同一平面直角坐标系中的部分图象如图所示，则



A. a为$f(x)$，b为$g(x)$，c为$h(x)$　　B. a为$h(x)$，b为$f(x)$，c为$g(x)$

C. a为$g(x)$，b为$f(x)$，c为$h(x)$　　D. a为$h(x)$，b为$g(x)$，c为$f(x)$

12. 在立体几何探究课上，老师给每个小组分发了一个正四面体的实物模型，同学们在探究的过程中得到了一些有趣的结论. 已知直线AD//平面α，直线BC//平面α，F是棱BC上一动点，现有下列四个结论：



①若M,N分别为棱AC,BD的中点，则直线MN//平面α；

②在棱BC上存在点F，使$AF\perp$平面α；

③当F为棱BC的中点时，平面$ADF\perp$平面α；

④平面α与平面BCD所成锐二面角的正切值为$\sqrt{2}$.

其中所有正确结论的编号是

A. ①②　　B. ①③　　C. ②④　　D. ③④

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 若x,y满足约束条件$\begin{cases}x+y-2\leqslant 0,\\ x-2y-2\leqslant 0,\\ 2x-y+2\geqslant 0,\end{cases}$则目标函数$z=y-3x$的最小值为____

14. 已知 z_1 为复数，且 $|z_1|=2$，则 $|z_1+2i|$ 的最大值为___▲ 2___.

15. 悬链线是平面曲线，是柔性链条或缆索两端固定在两根支柱顶部，中间自然下垂所形成的外形，在工程中（如悬索桥、双曲拱桥、架空电缆）有广泛的应用. 当微积分尚未出现时，伽利略猜测这种形状是抛物线，直到 1691 年莱布尼兹和伯努利利用微积分推导出悬链线的方程 $y=\frac{c}{2}(e^{\frac{x}{c}}\pm e^{-\frac{x}{c}})$，其中 c 为参数. 当 $c=1$ 时，我们可构造出双曲函数（双曲正弦函数 $\sin h(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 和双曲余弦函数 $\cos h(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$），则函数 $y=\cos h(2x)+\sin h(x)$ 的最小值为___▲___.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=-\frac{1}{9}$，其前 n 项和为 S_n，且满足 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{11}{n(n+1)}$，则当 S_n 取得最小值时，$n=$___▲___. $a_2=-\frac{2}{7}$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤. 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.（12 分）

如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=3$，$AC=\sqrt{2}$，BC 边的中垂线交 BC 于 D，交 AB 于 E，且 $BE=2AE$.

（1）求 $\sin B$ 的值；

（2）求 $\triangle ABC$ 的面积.

18.（12 分）

为了提高检测某种病毒的效率，某医院将采取混合血样检测的方法. 血液化验结果呈阳性则说明有人感染，否则，无人感染. 现有 5 人待测血样（其中 1 人感染），将每人的待测血样平均分为甲、乙两组.

甲组：先将 2 人的血液混在一起检验. 若结果呈阳性，则再从这 2 人中任选 1 人检验；若结果呈阴性，则另外 3 人再逐个检验，直至确定出该感染者.

乙组：先将 3 人的血液混在一起检验. 若结果呈阳性，则再逐个化验，直至确定出该感染者；若结果呈阴性，则再从另外 2 人中任选 1 人检验，直至确定出该感染者.（以上检测次数均指最少次数）

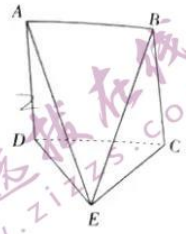
（1）求甲组化验次数多于乙组化验次数的概率；

（2）X 表示甲组所需化验的次数，求 X 的期望.

已知四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，平面 $ABCD\perp$ 平面 DEC，且 $DE=EC$，平面 ADE 与平面 BEC 所成的锐二面角为 60°.

(1)求四棱锥 $E-ABCD$ 的体积；$\frac{1}{3}Sh$

(2)当四棱锥 $E-ABCD$ 的体积大于 1 时，求直线 EC 与平面 ABE 所成角的正弦值.



(12 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，且点 $M(2,1)$ 为椭圆 C 上一点.

(1)求椭圆 C 的方程. $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$

(2)已知 $P(2\sqrt{2},0)$，直线 $l:x=my+\sqrt{2}$ 交椭圆 C 于 A,B 两点，证明：直线 PA 斜率与直线 PB 斜率之积为定值.

(2)

12 分)

已知函数 $f(x)=xe^{x-a}-x^2$.

1)讨论 $f(x)$ 零点的个数.

2)设 m,n 为两个不相等的正数，且 $e^{m-a}-m=e^{n-a}-n=0$，证明：$mn<1$.

(1) $f(x)=x(e^{x-a}-x)$ 令 $g(x)=\frac{e^x}{e^a}-x=0$ 令 $h(x)=\frac{e^x}{x}$

$=x(\frac{e^x}{e^a}-x)$ $\frac{1}{e^a}=e^a$ 则 $h'(x)=\frac{e^x\cdot x-e^x}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$

选考题：共 10 分. 请考生从第 22,23 两题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一个题目计分.

选修 4—4：坐标系与参数方程](10 分)

平面直角坐标系 xOy 中，圆 C_1 的圆心为 $(1,0)$，半径为 1，圆 C_2 与圆 C_1 关于 y 轴对称. 以点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

)求圆 C_1 和 C_2 的极坐标方程；

)设 M,N 分别是圆 C_1 和 C_2 上的两个动点，且满足 $\angle MON=\frac{\pi}{2}$，求 $\triangle OMN$ 面积的最大值.

修 4—5：不等式选讲](10 分)

知函数 $f(x)=|x+a|-2|x-1|$.

当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x)>1$ 的解集；

若 $f(x)\leqslant 3a-|x+a|$，求 a 的取值范围.

高三数学考试参考答案(理科)

1. B 【解析】本题考查集合的交集，考查运算求解能力.

因为 $A=\{x|0<x\leqslant 2\}$，$B=\{x|x<1\}$，所以 $A\cap B=\{x|0<x<1\}$.

2. D 【解析】本题考查双曲线，考查运算求解能力.

由题可知双曲线的焦点在 y 轴上，$c^2=a^2+b^2=4+3=7$，故焦点坐标为 $(0,\sqrt{7})$ 和 $(0,-\sqrt{7})$.

3. A 【解析】本题考查统计，考查数据分析的核心素养.

经计算，甲的总环数大于乙的总环数，因此甲为中国选手，乙为韩国选手，故 A 正确. 甲射击成绩的众数是 9，乙射击成绩的众数是 10，故 B 错误. 经计算，甲射击成绩的极差大于乙射击成绩的极差，故 C 错误. 甲射击成绩的中位数等于乙射击成绩的中位数，故 D 错误.

4. B 【解析】本题考查函数的极值点，考查运算求解能力.

$f'(x)=\frac{2}{x}+x-3=\frac{x^2-3x+2}{x}=\frac{(x-1)(x-2)}{x}$，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(2,+\infty)$ 上单调递增，在 $(1,2)$ 上单调递减，故 $a=2$.

5. B 【解析】本题考查等差数列的性质，考查运算求解能力.

由题意得，$a_2+a_{10}=2a_6=10$，则 $a_6=5$，故 $S_9-S_2=a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9=7a_6=35$.

6. C 【解析】本题考查平面向量的运算，考查运算求解能力.

由 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，得 $m-1+m=0$，则 $m=\frac{1}{2}$，$\boldsymbol{b}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，$\boldsymbol{c}=(1,2)$，所以 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$.

7. B 【解析】本题考查正四棱柱的外接球，考查空间想象能力.

设外接球的半径为 R，所以 $4\pi R^2=4\pi$，则 $R=1$，所以正四棱柱的高为 $\sqrt{2^2-1^2-1^2}=\sqrt{2}$，

则该四棱柱的侧面积为 $4\sqrt{2}$.

8. A 【解析】本题考查计数原理，考查逻辑推理的核心素养.

从 8 个点中任取 3 个点，共有 $C_8^3=56$ 种情况，这 3 个点恰好位于同一个奥林匹克环上有 $3C_4^3=12$ 种情况，

则所求的概率 $P=\frac{12}{56}=\frac{3}{14}$.

9. D 【解析】本题考查对数运算，考查运算求解能力.

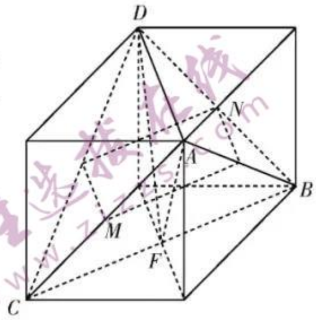
由题意，得 $\log_2 x=\log_3\frac{1}{4}$，故 $x=2^{\log_3\frac{1}{4}}=2^{\log_3 2^{-2}}=2^{-2\log_3 2}=(2^{-2})^{\log_3 2}=(\frac{1}{4})^{\log_3 2}$.

10. A 【解析】本题考查抛物线的几何性质，考查数形结合的数学思想.

由题意得圆的方程为 $x^2+y^2=\frac{p^2}{4}$，联立 $\begin{cases}x^2+y^2=\frac{p^2}{4},\\ y^2=2px,\end{cases}$ 可得 $x^2+2px=\frac{p^2}{4}$，解得 $x=\frac{\sqrt{5}p}{2}-p$，所以 $|AF|=x+\frac{p}{2}=\frac{\sqrt{5}p}{2}-\frac{p}{2}=\sqrt{5}-1$，所以 $p=2$.

11. C 【解析】本题考查三角函数的图象，考查数学抽象以及逻辑推理的核心素养.

$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 的最小正周期分别为 π，π，2π，易知 c 为 $h(x)$. 当 $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$h(x)=\sin x$ 取得最大值；当 $x=\frac{7\pi}{12}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 取得最小值；当 $x=\frac{2\pi}{5}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$g(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{5})$ 取得最小值. 结合图象可知，a 为 $g(x)$，b 为 $f(x)$，故选 C.



12. D 【解析】本题考查点、线、面的位置关系，考查空间想象能力.

可将正四面体放在正方体中研究，如图，可知③，④正确. 直线 $MN//$ 平面 α 或直线 $MN\subset$ 平面 α，①错误. 正方体的上、下底面与平面 α 平行，因此，与平面 α 垂直的直线只能是与其四条侧棱平行或重合的直线，②错误.

13. -6 【解析】本题考查线性规划，考查数形结合的数学思想.

画出可行域(图略)知，当 $l: z=y-3x$ 平移到过点 $(2,0)$ 时，z 取得最小值，且最小值为 -6.

14. 4 【解析】本题考查复数的四则运算，考查逻辑推理的核心素养.

$|z_1+2i|\leqslant|z_1|+|2i|=2+2=4$.

15. $\frac{7}{8}$ 【解析】本题考查函数的最值，考查运算求解能力.

$$y=\cos h(2x)+\sin h(x)=\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}+\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=\frac{(e^{x}-e^{-x})^2+(e^{x}-e^{-x})+2}{2}=\frac{(e^{x}-e^{-x}+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}}{2}\geqslant\frac{7}{8},$$

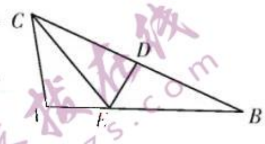
所以函数 $y=\cos h(2x)+\sin h(x)$ 的最小值为 $\frac{7}{8}$.

16. 5 【解析】本题考查数列的递推关系，考查逻辑推理的核心素养.

由题意，可得 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{11}{n(n+1)}=\frac{11}{n}-\frac{11}{n+1}$，$\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{11}{n+1}=\frac{1}{a_n}+\frac{11}{n}$.

令 $b_n=\frac{1}{a_n}+\frac{11}{n}$，则 $b_{n+1}=b_n$，即 $\{b_n\}$ 是常数列，所以 $b_n=\frac{1}{a_n}+\frac{11}{n}=b_1=\frac{1}{a_1}+11=2$，故 $a_n=\frac{n}{2n-11}$.

当 $1\leqslant n\leqslant5$ 时，$a_n<0$；当 $n\geqslant6$ 时，$a_n>0$. 故当 $n=5$ 时，S_n 取得最小值.



17. 解：(1)如图，连接 CE，则 $CE=EB=2$. ………………………………… 1 分

在 $\triangle ACE$ 中，$\cos\angle CEA=\frac{CE^2+AE^2-AC^2}{2CE\cdot AE}=\frac{1+4-2}{2\times1\times2}=\frac{3}{4}$. ………………… 3 分

因为 $\angle CEA=2\angle B$，所以 $\cos\angle CEA=1-2\sin^2 B=\frac{3}{4}$. ………………………… 5 分

解得 $\sin B=\frac{\sqrt{2}}{4}$. ……………………………………………………………… 6 分

(2)由(1)可知 $\sin\angle CEA=\sqrt{1-(\frac{3}{4})^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$， ………………………………………… 8 分

则 $S_{\triangle ACE}=\frac{1}{2}\times1\times2\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{\sqrt{7}}{4}$. …………………………………………… 10 分

因为 $BE=2AE$，所以 $S_{\triangle ABC}=3S_{\triangle ACE}=\frac{3\sqrt{7}}{4}$. ………………………………… 12 分

评分细则：

【1】第 1 问也可以先求出角 A，得 2 分，利用余弦定理求出 BC，累积得 4 分，再利用正弦定理得出 $\sin B$，累积得 6 分；

【2】第 2 问也可以根据第 1 问求出的 $\sin A$，求得 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A=\frac{3\sqrt{7}}{4}$，正确即可得满分.

18. 解：(1)设事件 A_1，A_2 分别表示依方案甲需要化验 2 次，3 次，事件 B_1，B_2 分别表示依方案乙需化验 2 次，3 次，事件 A 表示甲组化验次数多于乙组化验次数.

依题意，显然 A_2 与 B_1 独立，则 $A=A_2B_1$， ……………………………………………… 1 分

$P(\overline{A_2})=P(A_1)=\frac{C_4^1}{C_5^2}+\frac{C_4^2}{C_5^2}\times\frac{1}{C_3^1}=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$，$P(B_1)=\frac{C_4^3}{C_5^3}+\frac{C_4^2\times1}{C_5^3\times C_3^1}=\frac{3}{5}$，…………………………………… 3分

$P(A)=P(A_2B_1)=P(A_2)\cdot P(B_1)=[1-P(\overline{A_2})]\cdot P(B_1)=(1-\frac{3}{5})\times\frac{3}{5}=\frac{6}{25}$.

故甲组化验次数多于乙组化验次数的概率为$\frac{6}{25}$. …………………………………………………… 6分

(2)X的可能取值为2,3. …………………………………………………………………………………… 7分

$P(X=2)=\frac{C_4^1}{C_5^2}+\frac{C_4^2}{C_5^2}\times\frac{1}{C_3^1}=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$，$P(X=3)=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$. …………………………………… 9分

X的分布列为

X	2	3
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

…… 10分

$E(X)=2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{2}{5}=\frac{12}{5}$. ……………………………………………………………………… 12分

评分细则：

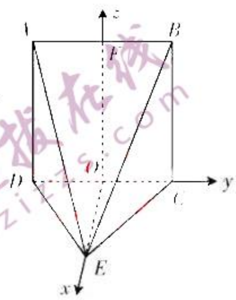
【1】第1问直接写所求概率$P=(1-\frac{C_4^1}{C_5^2}-\frac{C_4^2}{C_5^2}\times\frac{1}{C_3^1})(\frac{C_4^3}{C_5^3}+\frac{C_4^2\times1}{C_5^3\times C_3^1})=\frac{6}{25}$，答案正确得6分，答案不正确不得分；

【2】第2问中直接写出X的分布列不扣分.

19. 解：(1)因为四边形$ABCD$是正方形，所以$AD\perp CD$.

因为平面$ABCD\perp$平面DEC，平面$ABCD\cap$平面$DEC=DC$，

所以$AD\perp$平面DEC. …………………………………………………………………… 1分



如图，取CD的中点O，连接OE，过O作$OF\parallel AD$交AB于F，故$OF\perp$平面DEC.

又$DE=EC$，故$OE\perp CD$. …………………………………………………………………… 2分

分别以$\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OF}$的方向为x，y，z轴的正方向，建立空间直角坐标系$O-xyz$.

设$OE=a$，则$B(0,1,2)$，$C(0,1,0)$，$E(a,0,0)$，$A(0,-1,2)$，$D(0,-1,0)$.

经计算，平面BEC的一个法向量为$\boldsymbol{u}=(1,a,0)$，平面ADE的一个法向量为$\boldsymbol{v}=(1,-a,0)$. ………… 3分

$|\cos\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle|=|\frac{1\times1-a\times a+0\times0}{\sqrt{1+a^2+0}\cdot\sqrt{1+a^2+0}}|=|\frac{1-a^2}{1+a^2}|=\cos60^\circ=\frac{1}{2}$，

解得$a=\frac{\sqrt{3}}{3}$或$a=\sqrt{3}$. ……………………………………………………………………………… 5分

当$a=\sqrt{3}$时，$V_{E-ABCD}=\frac{1}{3}\times S_{ABCD}\times h=\frac{1}{3}\times2\times2\times\sqrt{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$；…………………………………… 6分

当$a=\frac{\sqrt{3}}{3}$时，$V_{E-ABCD}=\frac{1}{3}\times S_{ABCD}\times h=\frac{1}{3}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{9}$. ………………………………………… 7分

(2)由(1)知$\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{AE}=(\sqrt{3},1,-2)$，$\overrightarrow{EC}=(-\sqrt{3},1,0)$.

设平面ABE的法向量为$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}2y=0,\\ \sqrt{3}x+y-2z=0,\end{cases}$令$x=2$，则$\boldsymbol{m}=(2,0,\sqrt{3})$. ……………… 9分

设直线EC与平面ABE所成的角为θ，则$\sin\theta=|\frac{-2\sqrt{3}+1\times0+0\times\sqrt{3}}{\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2+0^2}\times\sqrt{2^2+0^2+(\sqrt{3})^2}}|=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

所以直线 EC 与平面 ABE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$. ………………………… 12 分

评分细则：

【1】第 1 问也可以将四棱锥补成直三棱柱，得出 $\angle DEC$ 或其补角为平面 ADE 与平面 BEC 所成的锐二面角，进而求得答案，答案少一种情况，扣 2 分；

【2】解析中得到平面的法向量不唯一，只要与参考答案中求得的法向量共线即可得分.

20. (1)解：由题意，$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$. ………………………… 2 分

解得 $a=2\sqrt{2}$，$b=\sqrt{2}$， ………………………… 4 分

因此椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$. ………………………… 5 分

(2)证明：直线 l 的方程为 $x=my+\sqrt{2}$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 PA 的斜率为 k_1，直线 PB 的斜率为 k_2.

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1,\\ x=my+\sqrt{2},\end{cases}$ 消去 x，得 $(m^2+4)y^2+2\sqrt{2}my-6=0$.

易知 $\Delta=32m^2+96>0$，得 $y_1+y_2=\frac{-2\sqrt{2}m}{m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{-6}{m^2+4}$. ………………………… 8 分

$k_1k_2=\frac{y_1y_2}{(x_1-2\sqrt{2})(x_2-2\sqrt{2})}=\frac{y_1y_2}{(my_1-\sqrt{2})(my_2-\sqrt{2})}=\frac{y_1y_2}{m^2y_1y_2-\sqrt{2}m(y_1+y_2)+2}=-\frac{3}{4}$. ……… 12 分

评分细则：

【1】其他方法参照评分标准按步骤给分.

21. (1)解：已知 $f(x)=x(e^{x-a}-x)$，令 $f(x)=0$，则 $x=0$ 或 $e^{x-a}-x=0$. ………………………… 2 分

因为 $e^{x-a}-x=0$，所以 $x-\ln x=a$. 设 $h(x)=x-\ln x(x>0)$，则 $h'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$.

令 $h'(x)>0$，则 $x>1$；令 $h'(x)<0$，则 $0<x<1$.

所以函数 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，且 $h(1)=1$. ………………………… 3 分

综上，当 $a<1$ 时，$f(x)$ 只有一个零点；当 $a=1$ 时，$f(x)$ 恰有两个零点；当 $a>1$ 时，$f(x)$ 有三个零点. ………………………… 5 分

(2)证明：因为 $e^{m-a}-m=e^{n-a}-n=0$，所以 m,n 为 $f(x)$ 两个不同的零点，不妨设 $0<m<1<n$，则 $h(m)=h(n)=a$. ………………………… 7 分

令 $\varphi(x)=h(x)-h(\frac{1}{x})=x-\frac{1}{x}-2\ln x(0<x<1)$，

则 $\varphi'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=\frac{(x-1)^2}{x^2}>0$ 对任意的 $x\in(0,1)$ 恒成立，

所以函数 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，所以 $\varphi(x)<\varphi(1)=0$.

即当 $0<x<1$ 时，$h(x)<h(\frac{1}{x})$. ………………………… 9 分

又 $0<m<1$，所以 $h(m)=h(n)<h(\frac{1}{m})$. ………………………… 11 分

因为 $n>1$，$\frac{1}{m}>1$，且 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $n<\frac{1}{m}$，故 $mn<1$，得证. ………………………… 12 分

评分细则：

【1】第1问未说明 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的零点，扣2分；

【2】其他方法按步骤给分.

22. 解：(1)圆 C_1 的圆心为(1,0)，半径为1，所以圆 C_1 的方程为 $(x-1)^2+y^2=1$. ………………………… 1分

根据 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta, \\ x^2+y^2=\rho^2, \end{cases}$ 得出圆 C_1 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$. ………………………… 3分

因为圆 C_2 与圆 C_1 关于 y 轴对称，所以圆 C_2 的极坐标方程为 $\rho=-2\cos\theta$. ………………………… 5分

(2)结合圆的对称性，设 $M(\rho_1,\theta)$，$N(\rho_2,\theta+\frac{\pi}{2})$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，………………………… 6分

故△OMN 的面积为 $\frac{1}{2}|OM||ON|=\frac{\rho_1\rho_2}{2}=-\frac{1}{2}\times2\cos\theta\times2\cos(\theta+\frac{\pi}{2})=2\sin\theta\cos\theta=\sin2\theta$，……… 8分

当 $2\theta=\frac{\pi}{2}$，即 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，△OMN 的面积取得最大值1. ………………………… 10分

评分细则：

【1】第1问得到圆 C_1 的极坐标方程得3分，得到圆 C_2 的极坐标方程，累积得5分；

【2】第2问未说明 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，不扣分.

23. 解：(1)当 $a=1$ 时，$f(x)>1$ 化为 $|x+1|-2|x-1|-1>0$. ………………………… 1分

当 $x\leqslant-1$ 时，不等式化为 $x-4>0$，无解；………………………… 2分

当 $-1<x<1$ 时，不等式化为 $3x-2>0$，解得 $\frac{2}{3}<x<1$；………………………… 3分

当 $x\geqslant1$ 时，不等式化为 $-x+2>0$，解得 $1\leqslant x<2$. ………………………… 4分

所以 $f(x)>1$ 的解集为 $\{x|\frac{2}{3}<x<2\}$. ………………………… 5分

(2) $f(x)+|x+a|=2|x+a|-2|x-1|\leqslant2|a+1|$，………………………… 7分

由 $f(x)\leqslant3a-|x+a|$，可得 $3a\geqslant2|a+1|$，………………………… 8分

解得 $a\geqslant2$，故 a 的取值范围为 $[2,+\infty)$. ………………………… 10分

评分细则：

【1】结果未写成集合或者区间形式，扣1分；

【2】其他方法参照评分标准按步骤给分.

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于中国拔尖人才培养的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户（官方网址：www.zizzs.com）、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承‘’专业、专注、有态度‘’的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+ 大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网 “年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的新高考拔尖人才培养服务平台。