

齐齐哈尔市 高三上学期期末考试

数学试题

一、单选题（每题 5 分，共 40 分）

- 已知集合 $A = \{x | x = 3n + 2, n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x | 2 < x < 14\}$, 则集合 $A \cap B$ 中元素的个数为
A. 5 B. 4 C. 3 D. 2
- 已知复数 z 满足 $\frac{1}{1+i} = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$, 则 $a + b =$
A. 0 B. 1 C. -1 D. $\sqrt{2}$
- 有这样一道题目：“戴氏善屠，日益功倍，初日屠五两，今三十日屠讫，问共屠几何？”其意思为：“有一个姓戴的人善于屠肉，每一天屠完的肉是前一天的 2 倍，第一天屠了 5 两肉，共屠了 30 天，问一共屠了多少两肉？”在这个问题中，该屠夫前 5 天所屠肉的总两数为
A. 35 B. 75 C. 155 D. 315
- $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 2$, 且 $(\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{a}$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角是
A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{12}$
- 现有 10 名学生排成一排，其中 4 名男生，6 名女生，若有且只有 3 名男生相邻排在一起，则不同的排法共有（ ）种
A. $A_6^2 A_7^2$ B. $A_4^3 A_7^2$ C. $A_3^3 A_6^2 A_7^2$ D. $A_4^3 A_6^6 A_7^2$
- 已知函数 $f(x) = 2 \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2})$ 的图象的相邻两个零点的距离为 $\frac{\pi}{2}$, $f(0) = \sqrt{2}$, 则 $f(x) =$
A. $\sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4})$ B. $2 \sin(2x + \frac{\pi}{4})$
C. $\sqrt{2} \sin(4x + \frac{\pi}{4})$ D. $2 \sin(4x + \frac{\pi}{4})$
- 已知点 M, N, P, Q 在同一个球面上， $MN = 3$, $NP = 4$, $MP = 5$, 若四面体 $MNPQ$ 体积的最大值为 10, 则这个球的表面积是
A. $\frac{25\pi}{4}$ B. $\frac{625\pi}{16}$ C. $\frac{225\pi}{16}$ D. $\frac{125\pi}{4}$
- 已知函数 $f(x) = e^{\cos x} - 2 \ln x - x^2 + ax$, 若 $f(x) > 0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为
A. $(\frac{1}{e}, +\infty)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(\frac{2}{e}, +\infty)$ D. $(e, +\infty)$

二、多选题（每题 5 分，共 20 分，漏选得 2 分，错选不得分）

- 将函数 $f(x) = \sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，再将图象上所有点的横坐标变为原来

的 $\frac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变), 得到 $g(x)$ 的图象, 则

- A. 函数 $g(x - \frac{\pi}{3})$ 是偶函数
B. $x = -\frac{\pi}{6}$ 是函数 $g(x)$ 的一个零点
C. 函数 $g(x)$ 在区间 $[-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}]$ 上单调递增
D. 函数 $g(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{12}$ 对称

10. 若甲组样本数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$ (数据各不相同) 的平均数为 2, 方差为 4, 乙组样本数据

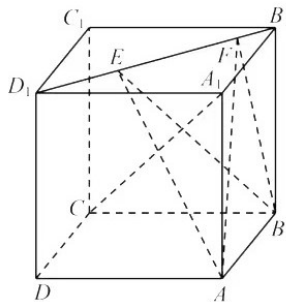
$3x_1 + a, 3x_2 + a, \dots, 3x_n + a$ 的平均数为 4, 则下列说法正确的是

- A. a 的值为 -2
B. 乙组样本数据的方差为 36
C. 两组样本数据的样本中位数一定相同
D. 两组样本数据的样本极差不同

11. 如图, 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 线段 B_1D_1 上有两个动点 E, F , 且 $EF = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

则下列结论中正确的有

- A. 当 E 点运动时, $A_1C \perp AE$ 总成立
B. 当 E 向 D_1 运动时, 二面角 $A - EF - B$ 逐渐变小
C. 二面角 $E - AB - C$ 的最小值为 45°
D. 三棱锥 $A - BEF$ 的体积为定值



12. 下列说法正确的有

- A. 若 $x < \frac{1}{2}$, 则 $2x + \frac{1}{2x-1}$ 的最大值是 -1
B. 若 x, y, z 是正数, 且 $x + y + z = 2$, 则 $\frac{4}{x+1} + \frac{1}{y+z}$ 的最小值是 3
C. 若 $x > 0, y > 0, x + 2y + 2xy = 8$, 则 $x + 2y$ 的最小值是 2
D. 若实数 x, y 满足 $xy > 0$, 则 $\frac{x}{x+y} + \frac{2y}{x+2y}$ 的最大值是 $4 - 2\sqrt{2}$

三、填空题 (每题 5 分, 共 20 分)

13. 在某项测量中, 测得变量 $\xi \sim N(1, \sigma^2) (\sigma > 0)$. 若 ξ 在 $(0, 2)$ 内取值的概率为 0.8, 则 ξ 在 $(1, 2)$ 内取值的概率为_____.

14. 函数 $f(x) = \frac{a \ln x}{e^x}$ 在点 $P(1, f(1))$ 处的切线与直线 $2x + y - 3 = 0$ 垂直, 则 $a =$ _____.

15. 过直线 $l: y = x - 2$ 上任意点 P 作圆 $C: x^2 + y^2 = 1$ 的两条切线, 切点分别为 A, B , 当切线

长最小时, $\triangle PAB$ 的面积为_____.

16. 抛物线 $x^2 = 2py (p > 0)$ 上一点 $A(\sqrt{3}, m) (m > 1)$ 到抛物线准线的距离为 $\frac{13}{4}$, 点 A 关于 y 轴的对称点为 B , O 为坐标原点, $\triangle OAB$ 的内切圆与 OA 切于点 E , 点 F 为内切圆上任意一点, 则 $\vec{OE} \cdot \vec{OF}$ 的取值范围为_____.

四、解答题 (共 70 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (10 分) 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_5 = 21$, $S_5 = 2a_6 + 3$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

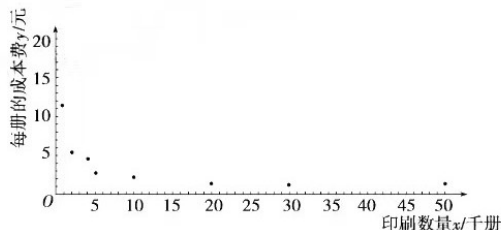
(2) 记 $b_n = \frac{n}{S_n}$, 数列 $\{b_n \cdot b_{n+1}\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_n .

18. (12 分) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 设 $\sqrt{3}b \sin A = a(2 + \cos B)$.

(1) 求 B ;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积等于 $\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长的最小值.

19. (12 分) 某机构为研究某种图书每册的成本费 y (单位: 元) 与印刷数量 x (单位: 千册) 的关系, 收集了一些数据并进行了初步处理, 得到了下面的散点图及一些统计量的值.



$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{u}$	$\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$\sum_{i=1}^8 (u_i - \bar{u})^2$	$\sum_{i=1}^8 (u_i - \bar{u})(y_i - \bar{y})$
15.25	3.63	0.269	2085.5	-230.3	0.787	7.049

注: 表中 $u_i = \frac{1}{x_i}$.

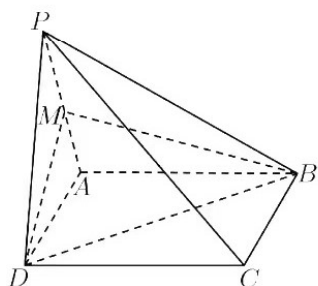
(1) 根据散点图判断: $y = a + bx$ 与 $y = c + \frac{d}{x}$ 哪一个模型更适合作为该图书每册的成本费 y (单位: 元) 与印刷数量 x (单位: 千册) 的经验回归方程? (只要求给出判断, 不必说明理由)

(2)根据(1)的判断结果以及表中数据,建立 y 关于 x 的经验回归方程;(计算结果精确到 0.01)

(3)若该图书每册的定价为 10 元,则至少应该印刷多少册才能使销售利润不低于 78 840 元?(假设能够全部售出,结果精确到 1)

参考公式:经验回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ 中, $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$.

20. (12 分) 如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形,侧面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$, M 为 PA 的中点, $PA = PD = \sqrt{10}$.



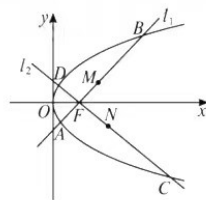
(1)求证: $PC \parallel$ 平面 BMD ;

(2)求二面角 $M-BD-P$ 的大小.

21. (12 分) 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 抛物线 C 上的点到准线的最小距离为 1.

(1)求抛物线 C 的方程;

(2)若过点 F 作互相垂直的两条直线 l_1 和 l_2 , l_1 与抛物线 C 交于 A, B 两点, l_2 与抛物线 C 交于 C, D 两点, M, N 分别为弦 AB, CD 的中点,求 $|MF| \cdot |NF|$ 的最小值.



22. (12 分) 已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{ae^x}{x^2} (a \in \mathbb{R})$.

(1)若 $a \leq 0$, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2)若 $f(x)$ 在区间 $(0, 2)$ 内有两个极值点, 求实数 a 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线