2018—2019 学年度高三年级上学期二调考试

数学（文科）试题

第 I 卷（选择题　共 60 分）

一、选择题（**每小题 5 分，共 60 分，下列每小题所给选项只有一项符合题意，请将正确答案的序号填涂在答题卡上**）

一、已知集合 $A=\{-1,0,1,2,3\},B=\{x|x^2-2x>0\}$，则 $A\cap B=$（）

（1）$\{3\}$　　B. $\{2,3\}$　　C. $\{-1,3\}$　　D. $\{1,2,3\}$

（1）下列关于命题的说法错误的是（）

13. 命题“若 $x^2-3x+2=0$，则 $x=2$”的逆否命题为“若 $x\neq 2$，则 $x^2-3x+2\neq 0$”

B.“$a=2$”是“函数 $f(x)=\log_a x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上为增函数”的充分不必要条件

C. 命题“$\exists x_0\in R$，使得 $x_0^2+x_0+1<0$”的否定是“$\forall x\in R$，均有 $x^2+x+1\geq 0$”

D.“若 x_0 为 $y=f(x)$ 的极值点，则 $f'(x_0)=0$”的逆命题为真命题

20. 复数 $z=\dfrac{2\mathrm{i}}{\mathrm{i}-1}$（i 为虚数单位）在复平面内对应的点所在象限为（）

（2）第二象限　B. 第一象限　C. 第四象限　D. 第三象限

4. 函数 $f(x)=x^3-3x^2+3x$ 的极值点的个数是（）

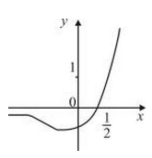
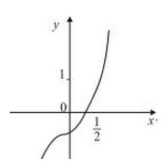
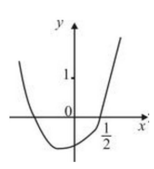
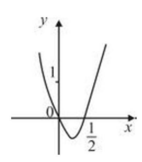
A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

5. 函数 $y=(2x-1)\mathrm{e}^x$ 的图象大致是（）

A.  B.  C.  D. 

6. 已知函数 $y=f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内单调递增，且 $f(-x)=f(x)$，若 $a=f\left(\log_{\frac{1}{2}}3\right),b=f\left(2^{-1.2}\right),c=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，则 a,b,c 的大小关系为（）

A. $a>c>b$

B. $b>c>a$

C. $b>a>c$

D. $a>b>c$

7. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，且对任意的 $x\in R,f(x+2)=f(x)$，当 $0\leq x\leq 1$，$f(x)=x^2$，若直线 $y=x+a$ 与函数 $f(x)$ 的图象在 $[0,2]$ 内恰有两个不同的公共点，则实数 a 的值是（）

A. 0　　B. 0 或 $-\dfrac{1}{2}$　　C. $-\dfrac{1}{4}$ 或 $-\dfrac{1}{2}$　　D. 0 或 $-\dfrac{1}{4}$

8. 为得到函数 $y=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象，只需将函数 $y=\sin 2x$ 的图象（）

A. 向右平移 $\dfrac{5\pi}{12}$ 个长度单位　　B. 向左平移 $\dfrac{5\pi}{12}$ 个长度单位

C. 向右平移 $\dfrac{5\pi}{6}$ 个长度单位　　D. 向左平移 $\dfrac{5\pi}{6}$ 个长度单位

9. 设函数 $f(x)=x(\ln x-ax)(a\in R)$ 在区间 $(0,2)$ 上有两个极值点，则 a 的取值范围是（）

A. $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$　　B. $\left(0,\dfrac{\ln 2+1}{4}\right)$　　C. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$　　D. $\left(\dfrac{\ln 2+1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$

10. 若函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$ 在区间 $(\pi,2\pi)$ 内没有最值，则 ω 的取值范围是（）

A. $\left(0,\frac{1}{12}\right]\cup\left[\frac{1}{4},\frac{2}{3}\right]$　　B. $\left(0,\frac{1}{6}\right]\cup\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$　　C. $\left[\frac{1}{4},\frac{2}{3}\right]$　　D. $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$

11. 已知函数 $f\left(x\right)=\ln x+1, g(x)=2\mathrm{e}^{x-\frac{1}{2}}$，若 $f\left(m\right)=g\left(n\right)$ 成立，则 $m-n$ 的最小值是（　）

A. $\frac{1}{2}+\ln 2$　　B. $\mathrm{e}-2$　　C. $\ln 2-\frac{1}{2}$　　D. $\sqrt{\mathrm{e}}-\frac{1}{2}$

12. 已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2+4x, x\le 0,\\ x\ln x, x>0,\end{cases}$ $g\left(x\right)=kx-1$，若方程 $f\left(x\right)-g\left(x\right)=0$ 在 $x\in\left(-2,\mathrm{e}^2\right)$ 上有 3 个实根，则 k 的取值范围为（）

A. $\left(1,2\right]$　　B. $\left(1,\frac{3}{2}\right]\cup\{2\}$　　C. $\left(1,\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},2\right)$　　D. $\left(1,\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},2+\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)$

第Ⅱ卷（共 90 分）

二、填空题（**每小题 5 分，共 20 分**）

13. 已知角 θ 的终边经过 $\left(-2,3\right)$，则 $\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{2}\right)=$___________.

14. 给出下列四个命题：

函数 $f\left(x\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的一条对称轴是 $x=\frac{7\pi}{12}$；

函数 $f\left(x\right)=\tan x$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ 对称；

若 $\sin\left(2x_1-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2x_2-\frac{\pi}{4}\right)=0$，则 $x_1-x_2=k\pi$，其中 $k\in Z$；

④函数 $y=\cos^2 x+\sin x$ 的最小值为 -1.

以上四个命题中错误的个数为___________个.

15. 已知 $y=f\left(x\right)\left(x\in R\right)$ 的导函数为 $f'\left(x\right)$，若 $f\left(x\right)-f\left(-x\right)=2x^3$，且当 $x\ge 0$ 时，$f'\left(x\right)>3x^2$，则不等式 $f\left(x\right)-f\left(x-1\right)>3x^2-3x+1$ 的解集是___________.

16. 已知函数 $f\left(x\right)=x+\ln x-\frac{2}{\mathrm{e}}, g\left(x\right)=\frac{m}{x}$，其中 e 为自然对数的底数，若函数 $f\left(x\right)$ 与 $g\left(x\right)$ 的图象恰有一个公共点，则实数 m 的取值范围是___________.

三、解答题（**本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤**）

17. （本小题满分 10 分）

已知函数 $f\left(x\right)=\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\sqrt{2}\sin^2\frac{x}{2}$.

（1）求 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间；

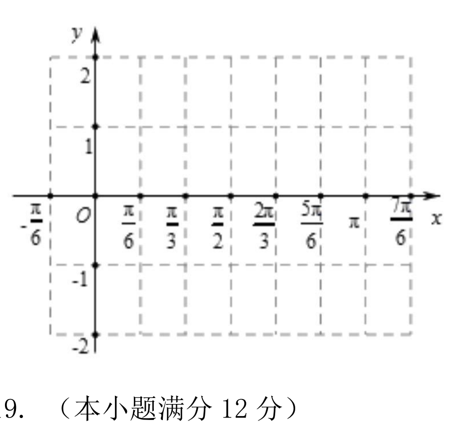
（2）求 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[-\pi,0\right]$ 上的最小值.

18. （本小题满分 12 分）

已知函数 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)+1\left(A>0,\omega>0\right)$ 的最大值为 3，其图象相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$.

（1）求函数 $f\left(x\right)$ 的解析式和当 $x\in\left[0,\pi\right]$ 时，$f\left(x\right)$ 的单调减区间；

（2）将 $f\left(x\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个长度单位，再向下平移 1 个长度单位，得到 $g\left(x\right)$ 的图象，用“五点 法”作出 $g\left(x\right)$ 在 $\left[0,\pi\right]$ 内的大致图象.



19. （本小题满分 12 分）

已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^x-2x$.

（1）求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(0,f\left(0\right)\right)$ 处的切线方程；

（2）若函数 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-a,x\in\left[-1,1\right]$ 恰有 2 个零点，求实数 a 的取值范围.

20. （本小题满分 12 分）

已知函数 $f\left(x\right)=-m\left(ax+1\right)\ln x+x-a$.

（1）当 $a=0$ 时，若 $f\left(x\right)\geq 0$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上恒成立，求 m 的取值范围；

（2）当 $m=a=1$ 时，证明：$\left(x-1\right)f\left(x\right)\leq 0$.

21. （本小题满分 12 分）

已知函数 $f\left(x\right)=\ln x-mx^2,g\left(x\right)=\frac{1}{2}mx^2+x,m\in R$, 令 $F\left(x\right)=f\left(x\right)+g\left(x\right)$.

（1）当 $m=\frac{1}{2}$ 时，求函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间及极值；

（2）若关于 x 的不等式 $F\left(x\right)\leq mx-1$ 恒成立，求整数 m 的最小值.

22. （本小题满分 12 分）

已知函数 $f\left(x\right)=\ln x+x+\frac{a}{x}\left(a\in R\right)$.

（1）若函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[1,+\infty\right)$ 上为增函数，求 a 的取值范围；

（2）若函数 $g\left(x\right)=xf\left(x\right)-\left(a+1\right)x^2-x$ 有两个不同的极值点，记作 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，证明：$x_1\bullet x_2^2>e^3$ $\left(e为自然对数的底数\right)$.

018-2019 学年度高三年级上学期二调考试

文科数学答案

一、选择题

CDCAABDBDBAB

二、填空题

13. $\frac{3\sqrt{13}}{13}$

14. 1

15. $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

16. $\left[0,+\infty\right)\cup\left\{-\frac{e+1}{e^2}\right\}$

三、解答题

17. 解：（1）$f\left(x\right)=\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\sqrt{2}\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\sqrt{2}\bullet\frac{1-\cos x}{2}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leq x+\frac{\pi}{4}\leq 2k\pi+\frac{\pi}{2}\left(k\in Z\right)$，

得 $2k\pi-\frac{3\pi}{4}\leq x\leq 2k\pi+\frac{\pi}{4}\left(k\in Z\right)$.

则 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间为 $\left[2k\pi-\frac{3\pi}{4},2k\pi+\frac{\pi}{4}\right]\left(k\in Z\right)$.（5 分）

（2）因为 $-\pi\leq x\leq 0$，所以 $-\frac{3\pi}{4}\leq x+\frac{\pi}{4}\leq\frac{\pi}{4}$，

当 $x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}$，即 $x=-\frac{3\pi}{4}$ 时，$f\left(x\right)_{\min}=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.（10 分）

18. 解：（1）因为函数 $f\left(x\right)$ 的最大值是 3，

所以 $A+1=3,即A=2.$

因为函数图象的相邻两条对称轴之间的距离为$\dfrac{\pi}{2}$，

所以最小正周期$T=\pi$,即$\omega=2$.

所以$f\left(x\right)=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)+1$.（3 分）

令$\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi\left(k\in Z\right)$，

即$\dfrac{\pi}{3}+k\pi\le x\le\dfrac{5\pi}{6}+k\pi\left(k\in Z\right)$.

因为$x\in\left[0,\pi\right]$，

所以$f\left(x\right)$的单调减区间为$\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}\right]$.（6 分）

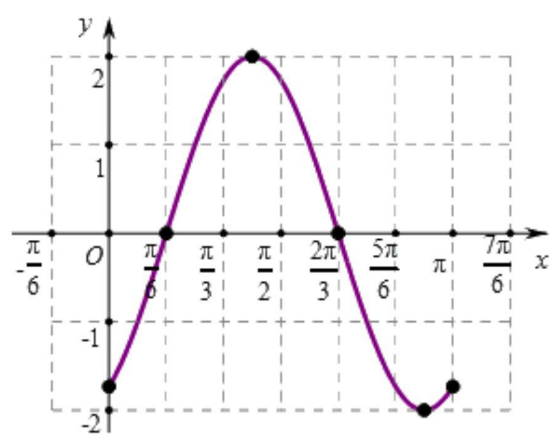
（2）依题意得，$g\left(x\right)=f\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)-1=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

列表得：

x	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{5\pi}{12}$	$\dfrac{2\pi}{3}$	$\dfrac{11\pi}{12}$	π
$2x-\dfrac{\pi}{3}$	$-\dfrac{\pi}{3}$	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π	$\dfrac{3\pi}{2}$	$\dfrac{5\pi}{3}$
$f(x)$	$-\sqrt{3}$	0	2	0	-2	$-\sqrt{3}$

描点$\left(0,-\sqrt{3}\right),\left(\dfrac{\pi}{6},0\right),\left(\dfrac{5\pi}{12},2\right),\left(\dfrac{2\pi}{3},0\right),\left(\dfrac{11\pi}{12},-2\right),\left(\pi,-\sqrt{3}\right)$.

连线得$g\left(x\right)$在$\left[0,\pi\right]$内的大致图象.



（12 分）

19. 解：（1）因为$f\left(x\right)=\mathrm{e}^x-2x$，所以$f'\left(x\right)=\mathrm{e}^x-2$.

所以$f'\left(0\right)=-1$.

又$f\left(0\right)=1$,

所以曲线$y=f\left(x\right)$在点$\left(0,f\left(0\right)\right)$处的切线方程为$y-1=-x$,

即$x+y-1=0$.（5 分）

（2）由题意得，$g\left(x\right)=\mathrm{e}^x-2x-a$，

所以$g'\left(x\right)=\mathrm{e}^x-2$.

由$g'\left(x\right)=\mathrm{e}^x-2=0$，解得$x=\ln 2$，

故当$-1\le x<\ln 2$时，$g'\left(x\right)<0$，$g\left(x\right)$在$\left[-1,\ln 2\right)$上单调递减；

当$\ln 2<x\le 1$时，$g'\left(x\right)>0$，$g\left(x\right)$在$\left(\ln 2,1\right]$上单调递增.

所以$g\left(x\right)_{\min}=g\left(\ln 2\right)=2-2\ln 2-a$.

又$g\left(-1\right)=\mathrm{e}^{-1}+2-a$，$g\left(1\right)=\mathrm{e}-2-a$，

结合函数的图象可得，若函数恰有两个零点，

则$\begin{cases} g(-1)=e^{-1}+2-a\ge 0, \\ g(1)=e-2-a\ge 0, \\ g(\ln 2)=2-2\ln 2-a<0, \end{cases}$ 解得$2-2\ln 2<a\le e-2$.

所以实数a的取值范围为$\left(2-2\ln 2,e-2\right]$.（12分）

20. 解：（1）由$f(x)\ge 0$，得$m\le \dfrac{x}{\ln x}$在$(1,+\infty)$上恒成立.

令$g(x)=\dfrac{x}{\ln x}$，则$g'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$.

当$x\in(1,e)$时，$g'(x)<0$；

当$x\in(e,+\infty)$时，$g'(x)>0$，

所以$g(x)$在$(1,e)$上单调递减，在$(e,+\infty)$上单调递增.

故$g(x)$的最小值为$g(e)=e$.

所以$m\le e$，即m的取值范围为$\left(-\infty,e\right]$.（6分）

（2）因为$m=a=1$，

所以$f(x)=-(x+1)\ln x+x-1$，$f'(x)=-\ln x-\dfrac{x+1}{x}+1=-\ln x-\dfrac{1}{x}$.

令$h(x)=-\ln x-\dfrac{1}{x}$，则$h'(x)=-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1-x}{x^2}$.

当$x\in(1,+\infty)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减；

当$x\in(0,1)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增.

所以$h(x)_{\max}=h(1)=-1<0$，即当$x\in(0,+\infty)$时，$f'(x)<0$，

所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减.

又因为$f(1)=0,$

所以当$x\in(0,1)$时，$f(x)>0;$当$x\in(1,+\infty)$时，$f(x)<0.$

于是$(x-1)f(x)\le 0$对$\forall x\in(0,+\infty)$恒成立.（12分）

21. 解：（1）由题得，$f(x)=\ln x-\dfrac{1}{2}x^2(x>0)$，所以$f'(x)=\dfrac{1}{x}-x(x>0)$.

令$f'(x)=0,$得$x=1$.

由$f'(x)>0,$得$0<x<1$，所以$f(x)$的单调递增区间为$(0,1)$，（2分）

由$f'(x)<0,$得$x>1$，所以$f(x)$的单调递减区间$(1,+\infty)$.（3分）

所以函数$f(x)_{极大值}=f(1)=-\dfrac{1}{2}$，无极小值.（4分）

（2）法一：令$G(x)=F(x)-(mx-1)=\ln x-\dfrac{1}{2}mx^2+(1-m)x+1$，

所以$G'(x)=\dfrac{1}{x}-mx+(1-m)=\dfrac{-mx^2+(1-m)x+1}{x}$.

当$m\le 0$时，因为$x>0$，所以$G'(x)>0$，所以$G(x)$在$(0,+\infty)$上是递增函数.

又因为$G(1)=-\dfrac{3}{2}m+2>0$，所以关于x的不等式$G(x)\le mx-1$不能恒成立.

当$m>0$时，$G'(x)=\dfrac{-mx^2+(1-m)x+1}{x}=-\dfrac{m\left(x-\dfrac{1}{m}\right)(x+1)}{x}$.

令$G'(x)=0,$得$x=\dfrac{1}{m}$，

所以当$x\in\left(0,\dfrac{1}{m}\right)$时，$G'(x)>0$；当$x\in\left(\dfrac{1}{m},+\infty\right)$时，$G'(x)<0$，

因此函数$G(x)$在$x\in\left(0,\frac{1}{m}\right)$上是增函数，在$x\in\left(\frac{1}{m},+\infty\right)$上是减函数.

故函数$G(x)$的最大值为$G\left(\frac{1}{m}\right)=\frac{1}{2m}-\ln m$.

令$h(m)=\frac{1}{2m}-\ln m$，

因为$h(1)=\frac{1}{2}>0$，$h(2)=\frac{1}{4}-\ln 2<0$，

又因为$h(m)$在$m\in(0,+\infty)$上是减函数，

所以当$m\geq 2$时，$h(m)<0$，

所以整数m的最小值为2.（12分）

法二：由$F(x)\leq mx-1$恒成立，知$m\geq\frac{2(\ln x+x+1)}{x^2+2x}(x>0)$恒成立.

令$h(x)=\frac{2(\ln x+x+1)}{x^2+2x}(x>0)$，则$h'(x)=\frac{-2(x+1)(2\ln x+x)}{(x^2+2x)^2}$.

令$\varphi(x)=2\ln x+x$，

因为$\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\ln 4<0$，$\varphi(1)=1>0$，且$\varphi(x)$为增函数.

故存在$x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使$\varphi(x_0)=0$，即$2\ln x_0+x_0=0$.

当$0<x<x_0$时，$h'(x)>0$，$h(x)$为增函数，当$x>x_0$时，$h'(x)<0$，$h(x)$为减函数，

所以$h(x)_{\max}=h(x_0)=\frac{2\ln x_0+2x_0+2}{x_0^2+2x_0}=\frac{1}{x_0}$.

而$x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，所以$\frac{1}{x_0}\in(1,2)$，

所以整数m的最小值为2.（12分）

22.解:（1）由题可知，函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{x}+1-\frac{a}{x^2}=\frac{x^2+x-a}{x^2}$.

因为函数$f(x)$在区间$[1,+\infty)$上为增函数，

所以$f'(x)\geq 0$在区间$[1,+\infty)$上恒成立等价于$a\leq(x^2+x)_{\min}$，即$a\leq 2$，

所以a的取值范围是$(-\infty,2]$.（4分）

（2）由题得，$g(x)=x\ln x-ax^2+a-x$, 则$g'(x)=\ln x-2ax$.

因为$g(x)$有两个极值点x_1,x_2，

所以$\ln x_1=2ax_1,\ln x_2=2ax_2$.

欲证$x_1\cdot x_2^2>e^3$等价于证$\ln(x_1\cdot x_2^2)>\ln e^3=3$，即$\ln x_1+2\ln x_2>3$，

所以$ax_1+2ax_2>\frac{3}{2}$.

因为$0<x_1<x_2$，所以原不等式等价于$a>\frac{3}{2x_1+4x_2}$.

由$\ln x_1=2ax_1,\ln x_2=2ax_2$, 可得$\ln\frac{x_2}{x_1}=2a(x_2-x_1)$，则$a=\frac{\ln\frac{x_2}{x_1}}{2(x_2-x_1)}$.

由　　可知，原不等式等价于$\dfrac{\ln\dfrac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}>\dfrac{3}{x_1+2x_2}$，即$\ln\dfrac{x_2}{x_1}>\dfrac{3\left(x_2-x_1\right)}{x_1+2x_2}=\dfrac{3\left(\dfrac{x_2}{x_1}-1\right)}{1+\dfrac{2x_2}{x_1}}$.

设$t=\dfrac{x_2}{x_1}$，则$t>1$，则上式等价于$\ln t>\dfrac{3\left(t-1\right)}{1+2t}\left(t>1\right)$.

令$h\left(t\right)=\ln t-\dfrac{3\left(t-1\right)}{1+2t}\left(t>1\right)$，则$h'\left(t\right)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{3\left(1+2t\right)-6\left(t-1\right)}{\left(1+2t\right)^2}=\dfrac{\left(t-1\right)\left(4t-1\right)}{t\left(1+2t\right)^2}$.

因为$t>1$，所以$h'\left(t\right)>0$，所以$h\left(t\right)$在区间$\left(1,+\infty\right)$上单调递增，

所以当$t>1$时，$h\left(t\right)>h\left(1\right)=0$，即$\ln t>\dfrac{3\left(t-1\right)}{1+2t}$，

所以原不等式成立，即$x_1\cdot x_2^2>\mathrm{e}^3$.（12 分）