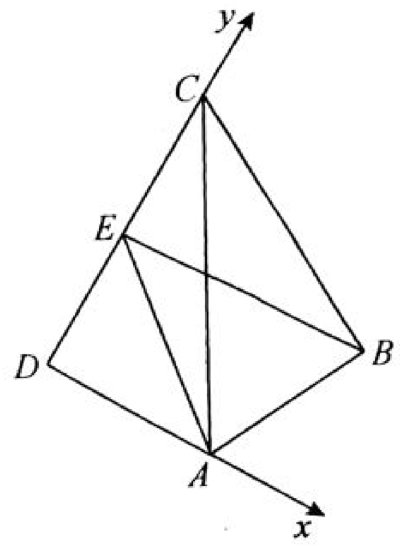
一、选择题

1. C.【解析】$\left|1-\frac{x-1}{2}\right|<\frac{1}{2}$，即$\left|\frac{3-x}{2}\right|<\frac{1}{2}$，等价于$|x-3|<1$，解得$-1<x-3<1$，即$2<x<4$，则$A=(2,4)$.$B=\{x\mid x^2-7x+10\geqslant 0\}=\{x\mid(x-2)(x-5)\geqslant 0\}=(-\infty,2]\cup[5,+\infty)$，$\complement_{\mathbf{R}}B=(2,5)$，$A\cap\complement_{\mathbf{R}}B=(2,4)$，故C正确.

2. D.【解析】$z=(1-2i)(a+i)=a+2+(1-2a)i$，由已知得$a+2+1-2a=0$，解得$a=3$.

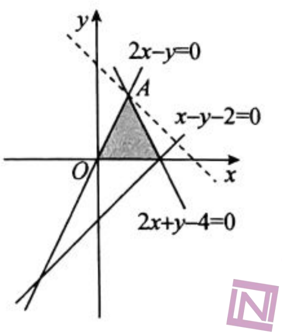
3. C.【解析】连接BD，在$\triangle ABD$中，由余弦定理知$BD^2=1^2+1^2-2\times1\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=3$，所以$BD=\sqrt{3}$.由正弦定理得$\frac{BD}{\sin 120^\circ}=2=AC$，所以$AC$为圆的直径，所以$CD\perp AD$，所以$CD=\sqrt{3}$.从而$CD=BD$，又$\angle BCD=180^\circ-120^\circ=60^\circ$，所以$\triangle BCD$为等边三角形.以$D$为原点，以$DA$所在直线为$x$轴，$DC$所在直线为$y$轴建立如图所示的平面直角坐标系.



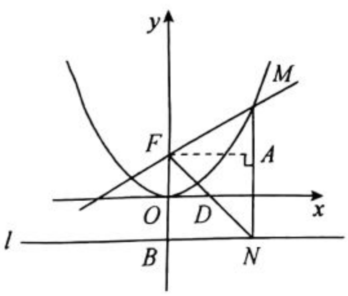
则$A(1,0)$，$E\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$B\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，所以$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}=\left(1,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{2},0\right)=\frac{3}{2}$.

4. D.【解析】甲景点的月收入的中位数为$\frac{33+34}{2}=33.5$，乙景点的月收入的中位数为$\frac{31+32}{2}=31.5$，故A不正确；甲景点的月收入的平均数为33，乙景点的月收入的平均数为33，故B不正确；甲景点的月收入的极差为$49-20=29$，乙景点的月收入的极差为$56-17=39$，故C不正确；观察茎叶图可知，甲景点的月收入的方差小于乙景点的月收入的方差，D选项正确.

5. C.【解析】作出可行域如图中阴影部分所示.当直线$y=-x+z$经过点$A(1,2)$时，截距z最大，则$z_{\max}=1+2=3$.



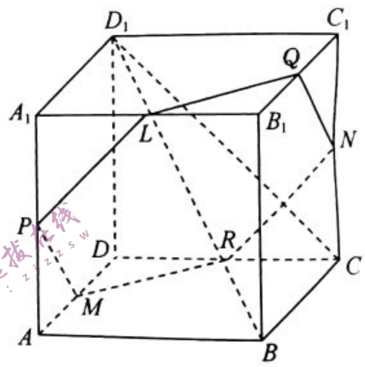
6. A.【解析】如图所示，过点F作$FA\perp MN$，垂足为A.由题得$\angle AFM=30°$，所以$\angle NMF=60°$.因为$|MF|=|MN|$，所以$\triangle MNF$是等边三角形.因为$MN\parallel OF$，所以$\angle OFD=\angle MNF=60°$.在$\mathrm{Rt}\triangle OFD$中，$|FD|=\frac{|OF|}{\cos\angle OFD}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$.



7. B.【解析】执行第一次循环，得$c=2,a=1,b=2,s=4,n=3$；执行第二次循环，得$c=3,a=2,b=3,s=7,n=4$；执行第三次循环，得$c=5,a=3,b=5,s=12,n=5$；执行第四次循环，得$c=8,a=5,b=8,s=20,n=6$；执行第五次循环，得$c=13,a=8,b=13,s=33,n=7$.因为$33>30$，所以退出循环，输出$n-1=6$.

8. B.【解析】由题图知，$f\left(-\frac{4\pi}{9}\right)=0$，则$-\frac{4\pi}{9}\omega+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得$\omega=-\frac{3+9k}{4}(k\in\mathbf{Z})$.设$g(x)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$的最小正周期为$T$，易知$T<2\pi<2T$，则$\frac{2\pi}{|\omega|}<2\pi<\frac{4\pi}{|\omega|}$，所以$1<|\omega|<2$，当且仅当$k=-1$时，符合题意，此时$\omega=\frac{3}{2}$.

9. A.【解析】设棱AA_1,CD,B_1C_1的中点分别为P,R,Q，平面LMN即为平面$PMRNQL$，如图所示，易证$BD_1\perp$平面$PMRNQL$，$BD_1\subset$平面CBD_1，故平面$CBD_1\perp$平面LMN.

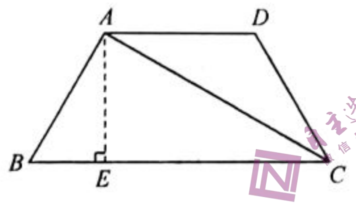


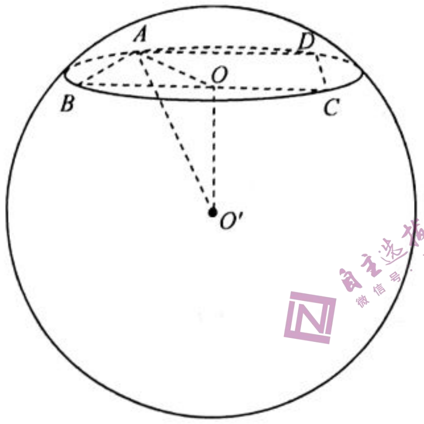
10. D.【解析】把该马每天行走的里程数按行走时间的先后顺序排成一列，则它是首项为$a_1=1$，公比为$q=\frac{1}{2}$的等比数列，记为$\{a_n\}$，则$\frac{a_1\left(1-\frac{1}{2^7}\right)}{1-\frac{1}{2}}=700$，解得$a_1=\frac{2^7\times350}{127}$.故该马第五天行走的里程数为$a_5=a_1\cdot\frac{1}{2^4}=\frac{2^7\times350}{127}\times\frac{1}{2^4}=\frac{2\ 800}{127}\approx22.05$.

11. A.【解析】由题意得$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$，$g(x)=\sqrt{2}\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$.令$t=\omega x+\frac{\pi}{4}$，由$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，得$t\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\omega}{2}\pi+\frac{\pi}{4}\right)$.因为在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上，$f(x)$为增

函数，$g(x)$为减函数，所以$\begin{cases}\dfrac{\omega}{2}\pi+\dfrac{\pi}{4}\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{\omega}{2}\pi+\dfrac{\pi}{4}\leqslant\pi,\end{cases}$解得$\omega\leqslant\dfrac{1}{2}$，所以$0<\omega\leqslant\dfrac{1}{2}$.

12. C.【解析】因为四边形$ABCD$是等腰梯形，$AD\parallel BC$，$AD=2$，$BC=4$，$\angle ABC=60°$，过点A作$AE\perp BC$，垂足为E，则$BE=1$，所以$AB=2BE=2$，$AE=\sqrt{3}$，$EC=3$.在$\triangle AEC$中，$AC^2=AE^2+EC^2=12$，所以$BC^2=AB^2+AC^2$，即$\angle BAC=90°$.同理可得$\angle BDC=90°$.所以四边形$ABCD$的外接圆的直径为$BC=4=2r$，$r=2$.设球心为O'，四边形$ABCD$的外接圆圆心为O，如图所示.





在$Rt\triangle AOO'$中，$AO'^2=AO^2+OO'^2$，即$4^2=2^2+OO'^2$，解得$OO'=2\sqrt{3}$.又因为四棱锥$S\text{-}ABCD$的底面$ABCD$的面积为定值，所以当高最大时体积最大，其高最大为$SO'+OO'=2\sqrt{3}+4$.

二、填空题

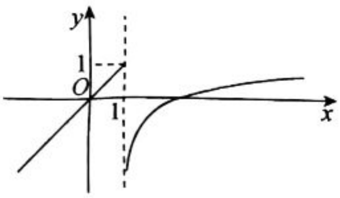
13. -2.【解析】由题意得$a_1+a_2=-4$.设$\{a_n\}$的公差为d，则$(a_2+a_3)-(a_1+a_2)=2d=-4$，所以$d=-2$.

14. $\dfrac{9}{10}$.【解析】从5名志愿者中任选3人，共有$C_5^3=10$种选法；男性志愿者和女性志愿者都有人入选，分为2男1女和2女1男两种情况，共有$C_3^2C_2^1+C_3^1C_2^2=9$种选法，因而所求的概率$P=\dfrac{9}{10}$.

15. $(x+1)^2+(y+1)^2=5$，或$(x+2)^2+(y+2)^2=5$，或$(x+1)^2+\left(y+\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{25}{4}$，或$(x+4)^2+y^2=25$（写出一个即可）.【解析】令$y=0$，则$x^2+2x-3=0$，解得$x_1=1$，$x_2=-3$，不妨设$A(1,0)$，$B(-3,0)$；令$x=0$，得$y=-3$，则$C(0,-3)$；抛物线的顶点$P$的坐标为$P(-1,-4)$.设所求圆的方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0(D^2+E^2-4F>0)$.当圆过$A,B,C$三点时，$\begin{cases}1+D+F=0,\\9-3D+F=0,\\9-3E+F=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}D=2,\\E=2,\\F=-3,\end{cases}$所以圆的方程为$x^2+y^2+2x+2y-3=0$.当圆过$B,C,P$三点时，$\begin{cases}9-3D+F=0,\\9-3E+F=0,\\1+16-D-4E+F=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}D=4,\\E=4,\\F=3,\end{cases}$所以圆的方程为$x^2+y^2+4x+4y+3=0$.当圆过$A,B,P$三点时，$\begin{cases}1+D+F=0,\\9-3D+F=0,\\1+16-D-4E+F=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}D=2,\\E=3,\\F=-3,\end{cases}$所以圆的方程为$x^2+y^2+2x+3y-3=0$.当圆过$A,C,P$三点时，$\begin{cases}1+D+F=0,\\9-3E+F=0,\\1+16-D-4E+F=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}D=8,\\E=0,\\F=-9,\end{cases}$所以圆的方程为$x^2+y^2+8x-9=0$.

16. $(-\infty,1]$.【解析】当$x\leqslant0$时，$e^x>0$，$f(f(x))=\ln e^x=x$；当$0<x\leqslant1$时，$\ln x\leqslant0$，$f(f(x))=e^{\ln x}=x$；当$x>1$时，$\ln x>0$，$f(f(x))=\ln(\ln x)$，则$h(x)=$

$f(f(x))=\begin{cases}x,x\leqslant 1,\\ \ln(\ln x),x>1.\end{cases}$ 函数 $y=\ln(\ln x)$ 的定义域为 $(1,+\infty)$，由复合函数单调性可知函数 $y=\ln(\ln x)$ 单调递增. 当 $x=e$ 时，$y=0$；当 x 从 1 的右侧趋向于 1 时，y 趋向于 $-\infty$；当 x 趋向于 $+\infty$ 时，y 趋向于 $+\infty$，作出 $h(x)$ 的图象如图所示. $g(x)$ 的零点个数即为曲线 $h(x)$ 与 $y=a$ 的交点个数，所以 a 的取值范围是 $(-\infty,1]$.



三、解答题

17. (1)**解**：因为 $\sin B=2\sin C$，所以由正弦定理可得 $b=2c$.

因为 $a=2b\cos B$，所以由余弦定理可得 $a=2b\times\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$. （3 分）

两式联立，整理得 $a^2=6c^2$，即 $a=\sqrt{6}c$.

在△ABC 中，由余弦定理得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{(2c)^2+c^2-(\sqrt{6}c)^2}{2\cdot(2c)\cdot c}=-\dfrac{1}{4}$. （5 分）

(2)**证明**：因为 $a=2b\cos B$，由正弦定理可得 $\sin A=2\sin B\cos B$.

因为 $A=\pi-(B+C)$，所以 $\sin A=\sin(B+C)$.

则 $\sin(B+C)=2\sin B\cos B$.

所以 $\sin B\cos C+\cos B\sin C=2\sin B\cos B$. （9 分）

由 $\sin B=2\sin C$，

得 $\sin B\cos C+\cos B\sin C=4\sin C\cos B$，

即 $\sin B\cos C=3\sin C\cos B$，

则 $\sin B\cos C-\cos B\sin C=2\sin C\cos B$.

所以 $\sin(B-C)=2\cos B\sin C$. （12 分）

18. (1)**证明**：如图，取 BC 的中点 E，连接 DE，PE.

又 D 为 AB 的中点，

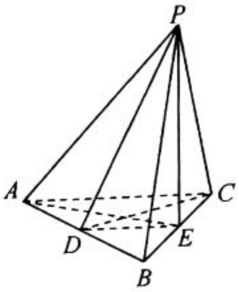
所以 $DE\parallel AC$.

又 $\angle ACB=90°$，则 $DE\perp BC$. （2 分）

因为 $PB=PC$，所以 $PE\perp BC$.

又因为 $DE\cap PE=E$，所以 $BC\perp$ 平面 PDE.

因为 $PD\subset$ 平面 PDE，所以 $BC\perp PD$. （5 分）



(2)**解**：如图，连接 AE，

因为 $AC=BC=1$，$\angle ACB=90°$，

所以 $AE=\sqrt{AC^2+CE^2}=\sqrt{1^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

因为 $PB=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，所以 $PE=\sqrt{PB^2-BE^2}=1$.

在△PAE 中，$AE=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，$PE=1$，$PA=\dfrac{3}{2}$，

所以 $AE^2+PE^2=PA^2$，所以 $PE\perp AE$. （9 分）

又 $PE\perp BC$，$AE\cap BC=E$，

所以 $PE\perp$ 平面 ABC. （10 分）

则三棱锥 P-ACD 的体积 $V_{三棱锥P\text{-}ACD}=\dfrac{1}{3}\times S_{\triangle ADC}\times PE=\dfrac{1}{12}$. （12 分）

19. **解**：(1) $\sum\limits_{i=1}^{6}y_i=5\,724$，$\overline{y}=\dfrac{1}{6}\sum\limits_{i=1}^{6}y_i=954$，

$\overline{x}=\dfrac{1}{6}\sum\limits_{i=1}^{6}x_i=3.5$. （2 分）

又 $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{\sqrt{70}}{2}$，$\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{6}(y_i-\overline{y})^2}=200\sqrt{70}$，

则样本相关系数 $r=\dfrac{26\,734-6\times 954\times 3.5}{\dfrac{\sqrt{70}}{2}\times 200\sqrt{70}}=\dfrac{6\,700}{7\,000}\approx 0.96$. （5 分）

因为样本相关系数 $r\approx0.96>0.75$，所以 y 与 x 具有较强的相关性，且正相关. (6 分)

(2)设 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，其中

$$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{6}x_iy_i-6\overline{x}\ \overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{6}x_i^2-6\overline{x}^2}=\frac{26\ 734-6\times3.5\times954}{\left(\frac{\sqrt{70}}{2}\right)^2}\approx382.86,$$

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=954-382.86\times3.5\approx-386.01$， (10 分)

所以 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=382.86x-386.01$.

把 $x=8$ 代入得 $\hat{y}\approx2\ 676.9$(亿元).

故据此预测 2023 年中国人工智能教育市场规模将达到约 2 676.9 亿元. (12 分)

20. **解**：(1)$f'(x)=e^x-a$.

因为 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以当 $x>0$ 时，$f'(x)\geqslant0$，即 $e^x-a\geqslant0$，所以 $a\leqslant e^x$. (2 分)

当 $x>0$ 时，$e^x>1$，所以 $a\leqslant1$.

所以 a 的取值范围是 $(-\infty,1]$. (4 分)

(2)若 $a\leqslant0$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，且 $f(-1)=\frac{1}{e}>0$.

由 $f(x)$ 存在零点且零点的绝对值小于 2，可得 $f(-2)=e^{-2}+a<0$，

故 $a<-\frac{1}{e^2}$. (6 分)

若 $a>0$，令 $f'(x)=e^x-a=0$，解得 $x=\ln a$.

当 $x\in(-\infty,\ln a)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x\in(\ln a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

因为 $f(x)$ 存在零点，所以 $f(\ln a)=-a\ln a\leqslant0$，

即 $a\ln a\geqslant0$.

又 $a>0$，所以 $\ln a\geqslant0$，$a\geqslant1$. (8 分)

当 $a=1$ 时，$f(0)=0$，满足题意.

当 $a>1$ 时，$f(-1)=\frac{1}{e}>0$，且当 x 趋向于正无穷时，$f(x)$ 趋向于正无穷，此时 $f(x)$ 存在两个零点，分别设为 $x_1,x_2(x_1<x_2)$.

因为 $f(0)=1-a<0$，所以 $-1<x_1<0$.

由题意知 $x_2<2$，则 $f(2)=e^2-3a>0$，即 $a<\frac{e^2}{3}$.故 $1<a<\frac{e^2}{3}$.

综上，实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{1}{e^2}\right)\cup\left[1,\frac{e^2}{3}\right)$. (12 分)

21. (1)**解**：设 E 的方程为 $Ax^2+By^2=1(A>0,B>0,A\neq B)$，则 $\begin{cases}4A=1,\\A+\frac{3}{4}B=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}A=\frac{1}{4},\\B=1,\end{cases}$

所以 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. (4 分)

(2)**证明**：由题意可知直线 MQ 的斜率存在且不为 0，设 MQ 的方程为 $x=my+1(m\neq0)$，点 $C(x_1,y_1)$，$M(x_2,y_2)$，$N(x_2,-y_2)$.

联立 $\begin{cases}x=my+1,\\x^2+4y^2=4,\end{cases}$ 消去 x，得 $(m^2+4)y^2+2my-3=0$，$\Delta=16m^2+48>0$，

则 $y_1+y_2=\frac{-2m}{m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{-3}{m^2+4}$. (6 分)

$k_{NC}=\frac{y_1+y_2}{x_1-x_2}$，所以 NC 的方程为 $y-y_1=\frac{y_1+y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$.

令 $y=0$，则 $x=x_1-\frac{y_1(x_1-x_2)}{y_1+y_2}=\frac{y_2x_1+x_2y_1}{y_1+y_2}=\frac{y_2(my_1+1)+(my_2+1)y_1}{y_1+y_2}=4$. (8 分)

所以直线 NC 恒过定点 $(4,0)$. (9 分)

又因为 $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{NC}=0$，所以 $QP\perp NC$，记点 $(4,0)$ 为 H，则点 P 在以 QH 为直径的圆上，从而 QH 的中点 $R\left(\frac{5}{2},0\right)$，使 $|PR|$ 为定值 $\frac{3}{2}$. (12 分)

22. **解**：(1)因为 $-1<\frac{1-t^2}{1+t^2}\leqslant1$，且 $y^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=$

$\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2+\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}=1$,

所以 C 的普通方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1(y\neq-1)$. (3 分)

因为$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\y=\rho\sin\theta,\end{cases}$所以 l 的直角坐标方程为 $2x+3y-a=0$. (5 分)

(2)由(1)可设 C 的参数方程为$\begin{cases}x=2\cos\alpha,\\y=\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$ 为参数,$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{2}$).

$a=2x+3y=4\cos\alpha+3\sin\alpha=5\sin(\alpha+\varphi)$,其中 $\tan\varphi=\frac{4}{3}\left(\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$. (8 分)

当 $\alpha=\frac{\pi}{2}-\varphi$ 时,a 取得最大值 5;当 $\alpha=\frac{3\pi}{2}-\varphi$ 时,a 取得最小值-5. (9 分)

所以实数 a 的取值范围为$[-5,5]$. (10 分)

23. 解:(1)$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)=\left(\frac{a+b+c}{a}-1\right)\left(\frac{a+b+c}{b}-1\right)\left(\frac{a+b+c}{c}-1\right)=\frac{b+c}{a}\times\frac{a+c}{b}\times\frac{a+b}{c}\geqslant\frac{2\sqrt{bc}}{a}\times\frac{2\sqrt{ac}}{b}\times\frac{2\sqrt{ab}}{c}=8$,当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$时,等号成立.

所以$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)$的最小值为 8.

(5 分)

(2)法 1:$[(a-1)+(b+1)+(c+2)]^2=(a-1)^2+(b+1)^2+(c+2)^2+2[(a-1)(b+1)+(b+1)(c+2)+(c+2)(a-1)]\leqslant3[(a-1)^2+(b+1)^2+(c+2)^2]$,

(8 分)

故由已知得$(a-1)^2+(b+1)^2+(c+2)^2\geqslant\frac{9}{3}=3$,当且仅当 $a=2,b=0,c=-1$ 时,等号成立.

所以$(a-1)^2+(b+1)^2+(c+2)^2$ 的最小值为 3.

(10 分)

法 2:$[(a-1)^2+(b+1)^2+(c+2)^2](1^2+1^2+1^2)\geqslant[(a-1)+(b+1)+(c+2)]^2=(a+b+c+2)^2=9$,

(8 分)

故$(a-1)^2+(b+1)^2+(c+2)^2\geqslant\frac{9}{3}=3$,当且仅当 $a=2,b=0,c=-1$ 时,等号成立.

所以$(a-1)^2+(b+1)^2+(c+2)^2$ 的最小值为 3.

(10 分)