

成都高新区 2020 级高中毕业班 “一诊” 模拟检测数学 (理科)

参考答案

1-12 BBACC CDCBC AD

13.3 14. -25 15. $2\sqrt{13}, \frac{2\sqrt{39}}{13}$ 16. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

17.

【解析】(1) $\because a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1}$,

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2a_n + 1}{a_n} = \frac{1}{a_n} + 2, \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{即 } \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 2,$$

$\therefore$ 数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 是首项和公差都为 2 的等差数列, $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

$$\therefore \frac{1}{a_n} = 2 + (n-1) \times 2 = 2n, \quad a_n = \frac{1}{2n}. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 选①: } \because b_n = a_n a_{n+1} = \frac{1}{2n} \times \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right), \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore T_n = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right). \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{n}{4n+4} \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\text{选②: } \because b_n = \frac{(-1)^n}{a_n} = (-1)^n \cdot 2n,$$

$$\text{当 } n = 2k, k \in \mathbb{N}^* \text{ 时, } T_n = (-2+4) + (-6+8) + \dots + (-2n+2+2n) = n; \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{当 } n = 2k-1, k \in \mathbb{N}^* \text{ 时, } T_n = T_{n-1} + a_n = n-1-2n = -n-1; \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore T_n = \begin{cases} -n-1, & n = 2k-1, k \in \mathbb{N}^* \\ n, & n = 2k, k \in \mathbb{N}^* \end{cases} \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\text{选③: } b_n = \frac{1}{a_n} + \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{1}{a_n}} = 2n + \frac{1}{9^{\frac{1}{2n}}},$$



$$\therefore T_n = (2+4+\cdots+2n) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \cdots + \frac{1}{9^n}\right) \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$= \frac{n(2+2n)}{2} + \frac{\frac{1}{9}(1-\frac{1}{9^n})}{1-\frac{1}{9}} \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$= n^2 + n + \frac{1}{8}(1-\frac{1}{9^n}) \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

18. 【解析】(1) $\because K^2 = \frac{400 \times (160 \times 40 - 80 \times 120)^2}{240 \times 160 \times 280 \times 120} \approx 3.175 < 3.841$, $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

$\therefore$ 没有 95% 的把握认为购买冰墩墩与人的性别有关 $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 选出的女性人数为 $5 \times \frac{160}{400} = 2$ 人, 选出的男性人数为 $5 \times \frac{240}{400} = 3$ 人, $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

$\therefore X$ 的可能取值为 0、1、2,

则 $P(X=0) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}$, $P(X=1) = \frac{C_2^1 C_3^1}{C_5^2} = \frac{3}{5}$, $P(X=2) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$, $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

$\therefore X$ 的分布列为:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

$$\therefore E(X) = 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{6}{5} \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. 【解析】(1) 证明: 过 F 作 $FH \perp AC$ 于 H , 连接 HE ,

$\therefore H$ 为 AC 的中点,

$\therefore HE \parallel AB$.

又 $\because HF \parallel AA_1$,

$\therefore HF \perp$ 平面 ABC , $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

又 $\because CD \subset$ 平面 ABC ,

$\therefore HF \perp CD$, 又 $\because AB \perp CD$,

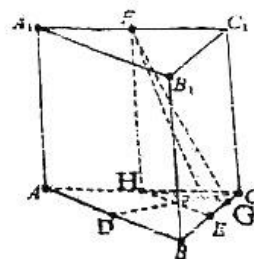
$\therefore HE \perp CD$, 又 $\because HE \cap HF = H$,

$\therefore CD \perp$ 平面 HEF . $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

又 $\because EF \subset$ 平面 HEF ,

$\therefore CD \perp EF$ $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(2) 法一: 过 H 作 $HG \perp BC$ 于 G , 连接 FG ,





不妨令 $CG = \frac{1}{4}BC = 1, BC = AC = AA_1 = 4$,

由 (1) 知, $\alpha = \angle FEH$, 且 $\tan \alpha = \frac{HF}{HE} = 2$,

同理可证: $FG \perp BC$, 则 $\beta = \angle FGH$, $\tan \beta = \frac{HF}{HG} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$,10 分

$\therefore \tan \alpha < \tan \beta$, 又 $\because \alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$,

$\therefore \alpha < \beta$12 分

法二: 分别以 HB, HC, HF 所在直线为 x 轴, y 轴, z 轴建立如图所示空间直角坐标系 $H-xyz$,

不妨令 $AC = AA_1 = 4$, 则

$A(0, -2, 0) \quad B(2\sqrt{3}, 0, 0) \quad C(0, 2, 0) \quad E(\sqrt{3}, 1, 0)$

$A_1(0, -2, 4) \quad F(0, 0, 4)$

$\therefore \overrightarrow{FE} = (\sqrt{3}, 1, -4), \quad \overrightarrow{BC} = (-2\sqrt{3}, 2, 0), \quad \overrightarrow{FC} = (0, 2, -4)$

设平面 ABC 的法向量 $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$, 则

$$\sin \alpha = |\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{FE} \rangle| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{FE}|}{|\mathbf{n}| |\overrightarrow{FE}|} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

设平面 FBC 的法向量 $\mathbf{m} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \mathbf{m} \perp \overrightarrow{BC} \\ \mathbf{m} \perp \overrightarrow{FC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{FC} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}x - y = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

取法向量 $\mathbf{m} = (2, 2\sqrt{3}, \sqrt{3})$,

$$\therefore \cos \langle \mathbf{n}, \mathbf{m} \rangle = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}}{|\mathbf{n}| |\mathbf{m}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}} = \frac{\sqrt{57}}{19},$$
10 分

$$\because \beta \in (0, \frac{\pi}{2}), \therefore \sin \beta = \frac{4\sqrt{19}}{19},$$

$$\therefore \sin \alpha < \sin \beta, \text{ 又 } \because \alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

$$\therefore \alpha < \beta$$
12 分

20. 【解析】

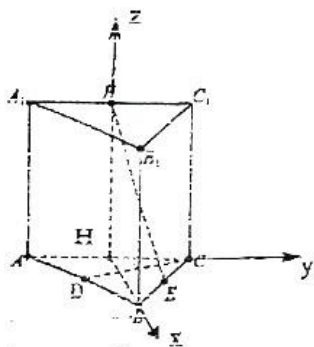
$$(1) k = \frac{1}{4} \text{ 时, } f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}x, x \geq 0,$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times (1 + 1 + 1) = \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times (1 + 1 + 1) = \frac{3}{4}$$
8 分

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times (1 + 1 + 1) = \frac{3}{4}$$
10 分

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times (1 + 1 + 1) = \frac{3}{4}$$
12 分



$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times (1 + 1 + 1) = \frac{3}{4}$$
8 分

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times (1 + 1 + 1) = \frac{3}{4}$$
10 分

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times (1 + 1 + 1) = \frac{3}{4}$$
12 分



令 $f'(x) \geq 0$ 得 $0 \leq x \leq 1$

故当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$

所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减 4 分

(2) 证明: 当 $n=1$ 时, 不等式左边 $= \frac{2}{3} - \ln 5 < 0 =$ 右边, 所以不等式成立.

由 (1) 知当 $k = \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减,

此时 $f(x) = x - \ln(x+1) - \frac{x^2}{2} \leq f(0) = 0$,

即当 $x \geq 0$ 时, $x - \ln(x+1) \leq \frac{x^2}{2}$, 6 分

令 $g(x) = x - \ln(x+1)$, 则 $g(x) \leq \frac{x^2}{2}$,

故 $g(\frac{2}{2i+1}) \leq \frac{2}{(2i+1)^2} < \frac{2}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1} (i \in \mathbb{N}^*)$ 8 分

当 $n \geq 2$ 时,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n g(\frac{2}{2i+1}) &= \sum_{i=1}^n [\frac{2}{2i+1} - \ln(1 + \frac{2}{2i+1})] = \sum_{i=1}^n (\frac{2}{2i+1} - \ln \frac{2i+3}{2i+1}) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{2}{2i+1} - \sum_{i=1}^n [\ln(2i+3) - \ln(2i+1)] \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{2}{2i+1} - [\ln 5 - \ln 3 + \ln 7 - \ln 5 + \cdots + \ln(2n+3) - \ln(2n+1)] \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{2}{2i+1} - \ln(2n+3) + \ln 3 \end{aligned}$$

..... 10 分

$$\text{所以 } \sum_{i=1}^n \frac{2}{2i+1} - \ln(2n+3) = \sum_{i=1}^n g(\frac{2}{2i+1}) - \ln 3$$

$$\begin{aligned} &< -\ln 3 + \sum_{i=1}^n (\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1}) \\ &= -\ln 3 + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \\ &= -\ln 3 + 1 - \frac{1}{2n+1} < 0. \end{aligned}$$

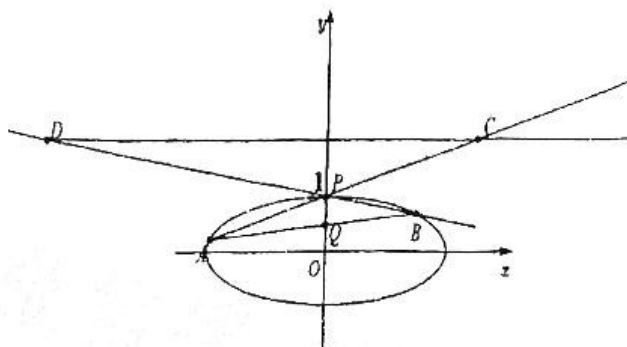
综上所述: $\sum_{i=1}^n \frac{2}{2i+1} - \ln(2n+3) < 0, n \in \mathbb{N}^*$12 分

21.

【解析】(1) 由题知, $b=1$, 又 $\because e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \frac{\sqrt{a^2-1}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 解得 $a=2$.

$\therefore$ 椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$;4 分

(2)



由题意, 直线 AB 的斜率必存在.

设直线 AB 的方程为: $y = kx + \frac{1}{2}$,

$$\text{联立} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ y = kx + \frac{1}{2} \end{cases}, \text{整理得: } (4k^2 + 1)x^2 + 4kx - 3 = 0,$$

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = -\frac{4k}{4k^2 + 1}$, $x_1 x_2 = -\frac{3}{4k^2 + 1}$,6 分

$\therefore$ 直线 PA 的方程为: $y = \frac{y_1 - 1}{x_1} x + 1$,

$$\therefore x_C = \frac{2x_1}{y_1 - 1} = \frac{2x_1}{kx_1 - \frac{1}{2}},$$

$$\text{同理可得: } x_D = \frac{2x_2}{y_2 - 1} = \frac{2x_2}{kx_2 - \frac{1}{2}},$$

$$\therefore |CD| = |x_C - x_D| = \left| \frac{2x_1}{kx_1 - \frac{1}{2}} - \frac{2x_2}{kx_2 - \frac{1}{2}} \right| \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$= \frac{|x_1 - x_2|}{|(kx_1 - \frac{1}{2})(kx_2 - \frac{1}{2})|} = \frac{\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}}{|k^2x_1x_2 - \frac{k}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{4}|} = 8\sqrt{16k^2 + 3} \geq 8\sqrt{3}$$

当且仅当 $k = 0$ 时 $|CD|_{\min} = 8\sqrt{3}$12 分

22.

【解析】(1) $\because$ 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + \cos \alpha \\ y = 1 + \sin \alpha \end{cases}$,

$$\therefore \begin{cases} x - 1 = \cos \alpha \\ y - 1 = \sin \alpha \end{cases}$$

$\therefore$ 曲线 C 的普通方程为 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, 即 $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$,2 分

$\because \rho \sin \theta - \sqrt{3}\rho \cos \theta + 1 = 0$, 且 $\rho \sin \theta = y, \rho \cos \theta = x$,

$\therefore y - \sqrt{3}x + 1 = 0$,4 分

综上: 曲线 C 的普通方程为 $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$; 直线 l 的直角坐标方程为 $\sqrt{3}x - y - 1 = 0$

.....5 分

$$(2) \text{ 设直线 } l \text{ 的参数方程为 } \begin{cases} x = \frac{1}{2}t \\ y = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}),$$

$$\text{将 } \begin{cases} x = \frac{1}{2}t \\ y = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases} \text{ 代入 } (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1, \text{ 得: } t^2 - (2\sqrt{3}+1)t + 4 = 0, \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

设点 M, N 对应的参数分别为 t_1, t_2 , 判别式 $\Delta > 0$ 恒成立.

$$\therefore t_1 + t_2 = 2\sqrt{3} + 1, \quad t_1 \cdot t_2 = 4 > 0,$$

$$\therefore |PM| + |PN| = |t_1| + |t_2| = t_1 + t_2 = 2\sqrt{3} + 1, \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

23.

【解析】

$$(1) \text{ 由 } a + b = 2, \text{ 得 } \frac{1}{2}(a + b) = 1.$$

$$\text{故 } \frac{1}{a} + \frac{4}{b} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b} \right) (a + b) = \frac{1}{2} \left(1 + 4 + \frac{b}{a} + \frac{4a}{b} \right) \geq \frac{1}{2} \left(1 + 4 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{4a}{b}} \right) = \frac{9}{2}, \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线