重庆市高2023届高三第六次质量检测

数学试题

2023.2

命审单位:重庆南开中学

注意事项:

1. 本试卷满分150分,考试时间120分钟。
2. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
3. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
4. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题:本题共8小题.每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求.

1. 已知集合 $A=\{x|2\leqslant 2^x\leqslant 4\}$, $B=\{x||x-2|\leqslant 3\}$,则 $A\cap B=$

A. $[-1,2]$　B. $[2,5]$　C. $[1,2]$　D. $[-1,5]$

2. 已知 p:"四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正棱柱",q:"四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面和侧面都是矩形",则 p 是 q 的(　　)条件

A. 充分不必要　B. 必要不充分

C. 充要　D. 既不充分也不必要

3. 已知 $P(1,2)$ 为角 α 终边上一点,则 $\dfrac{\cos 2\alpha}{1+\sin^2\alpha}=$

A. $-\dfrac{1}{3}$　B. $\dfrac{1}{3}$　C. -3　D. $\dfrac{1}{9}$

4. 某项活动安排了4个节目,每位观众都有6张相同的票,活动结束后将票全部投给喜欢的节目.一位观众最喜欢节目 A,准备给该节目至少投3张,剩下的票则随机投给其余的节目,但必须要 A 节目的得票数是最多的,则4个节目获得该观众的票数情况有(　　)种.

A. 150　B. 72　C. 20　D. 17

5. 已知点 M,N 分别是平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 DD_1,BC 上的点,且 $\overrightarrow{D_1M}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{D_1D}$, $\overrightarrow{BN}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$,点 P,Q 分别是线段 A_1N,B_1M 上的点,则满足与平面 $ABCD$ 平行的直线 PQ 有(　　)条

A. 0条　B. 1条　C. 2条　D. 无数条

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+\dfrac{1}{2},x\in\left[0,\dfrac{3}{2}\right)\\ 2-f\left(x-\dfrac{3}{2}\right),x\in\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)\end{cases}$,则 $f(x)>|\log_2 x|$ 的解集是

A. $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$　B. $(1,2)$　C. $\left(\dfrac{1}{2},2\right)$　D. $\left(\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,2)$

7. 已知 CD 为圆 A:$(x+1)^2+(y+1)^2=4$ 的一条弦,且以 CD 为直径的圆始终经过原点 O,则 CD 中点 B 的轨迹方程为

A. $x^2+y^2=1$　B. $x^2+y^2+x+y-1=0$

C. $x^2+y^2+x-1=0$　D. $x^2+y^2+x+y=0$

8. 已知点 $A_1, A_2, A_3, \cdots A_n \cdots$ 和数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足 $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}=(\cos\frac{2n\pi}{3}, \sin\frac{2n\pi}{3})(n\in N^*)$, $a_n\overrightarrow{A_nA_{n+1}}+a_{n+1}\overrightarrow{A_{n+1}A_{n+2}}=(0,b_n)$, 若 $a_1=1$, S_n, T_n 分别为数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 则 $S_{60}+2T_{60}=$

A. -20　　B. $24\sqrt{3}$　　C. $48\sqrt{3}-20$　　D. 0

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求. 全部选对得 5 分,部分选对得 2 分,有选错得 0 分.

9. 设 i 为虚数单位, 下列关于复数的命题正确的有

A. $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$

B. 若 z_1, z_2 互为共轭复数, 则 $|z_1|=|z_2|$

C. 若 $|z_1|=|z_2|$, 则 $z_1^2=z_2^2$

D. 若复数 $z=m+1+(m-1)i$ 为纯虚数, 则 $m=-1$

10. 某单位为了激励员工努力工作, 决定提高员工待遇, 给员工分两次涨工资, 现拟定了三种涨工资方案.

甲: 第一次涨幅 $a\%$, 第二次涨幅 $b\%$;

乙: 第一次涨幅 $\frac{a+b}{2}\%$, 第二次涨幅 $\frac{a+b}{2}\%$;

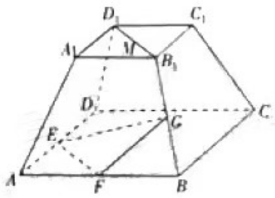
丙: 第一次涨幅 $\sqrt{ab}\%$, 第二次涨幅 $\sqrt{ab}\%$.

其中 $a>b>0$, 小明帮员工李华比较上述三种方案得到如下结论, 其中正确的有

A. 方案甲和方案乙工资涨得一样多　　B. 采用方案乙工资涨得比方案丙多

C. 采用方案乙工资涨得比方案甲多　　D. 采用方案丙工资涨得比方案甲多

11. 正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=2$, $A_1B_1=1$, 侧棱 AA_1 与底面所成角为 $\frac{\pi}{3}$. E、F、G 分别为 AD, AB, BB_1 的中点, M 为线段 B_1D_1 上一动点(包括端点), 则下列说法正确的是



A. 该四棱台的体积为 $\frac{7\sqrt{6}}{6}$

B. 三棱锥 $E-FGM$ 的体积为定值

C. 平面 EFG 截该棱台所得截面为六边形

D. 异面直线 AB_1 与 ED_1 所成角的余弦值为 $\frac{5\sqrt{2}}{8}$

12. 已知函数 $f(x)=\ln(\sin x)\cdot\ln(\cos x)$, 下列说法正确的是

A. $f(x)$ 定义域为 $\left(2k\pi, 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$, $k\in Z$　　B. $f(-x)=f(x)$

C. $f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 是偶函数　　D. $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上有唯一极大值点

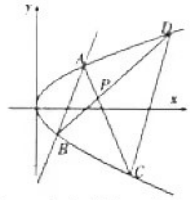
三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 已知随机变量 $\xi\sim B(5,p)$, 且 $E(\xi)=\frac{10}{9}$, 则 $D(\xi)=$ ________.

14. 已知向量 $\vec{a}=(1,2)$, $\vec{b}=(-2,1)$, $\vec{c}=(m,n)$ 满足 $(\vec{a}+2\vec{b})\perp\vec{c}$, 请写出一个符合题意的向量 $\vec{c}$ 的坐标________.

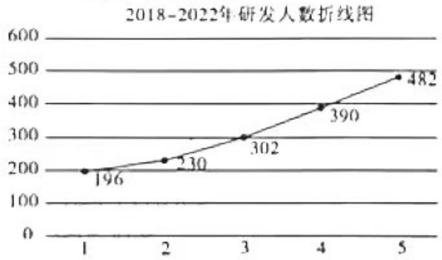
15. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$，各顶点均在以 PC 为直径的球面上，$AC=2\sqrt{3}$，$AB=2$，$BC=2$，则该球的体积为________.

16. 已知抛物线 $y^2=2px(x>0)$，$P(2,1)$ 为抛物线内一点，不经过 P 点的直线 $l:y=2x+m$ 与抛物线相交于 A,B 两点，连接 AP,BP 分别交抛物线于 C,D 两点，若对任意直线 l，总存在 λ，使得 $\vec{AP}=\lambda\vec{PC}$，$\vec{BP}=\lambda\vec{PD}(\lambda>0,\lambda\neq1)$ 成立，则该抛物线方程为________.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 党的二十大报告提出："必须坚持科技是第一生产力、人才是第一资源、创新是第一动力，深入实施科教兴国战略、人才强国战略、创新驱动发展战略，开辟发展新领域新赛道，不断塑造发展新动能新优势."某数字化公司为加快推进企业数字化进程，决定对其核心系统 DAP，采取逐年增加研发人员的办法以提升企业整体研发和创新能力. 现对 2018～2022 年的研发人数作了相关统计(年份代码 1～5 分别对应 2018～2022 年)如下折线图：



(1)根据折线统计图中数据，计算该公司研发人数 y 与年份代码 x 的相关系数 r，并由此判断其相关性的强弱；

(2)试求出 y 关于 x 的线性回归方程，并预测 2023 年该公司的研发人数(结果取整数).

参考数据：$\sum_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2=54944$，$\sqrt{549440}\approx741.2$；当 $|r|\in[0.75,1]$ 认为两个变量间的相关性较强

参考公式：相关系数 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$，

回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中的斜率和截距的最小二乘法估计公式分别为 $\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$，$\hat{a}=y-\hat{b}\bar{x}$.

18. 已知数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,T_n，$a_1=4$，$b_1=2$，$3T_n=a_{n+1}-a_1$.

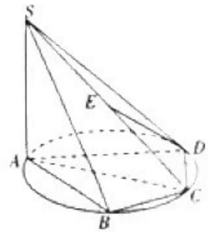
(1)若 $\{a_n\}$ 是等比数列，求 S_n；

(2)若 $b_{n+1}=3S_n+b_1$，证明：$\{a_n+b_n\}$，$\{a_n-b_n\}$ 均为等比数列.

19. 如图四棱锥 $S-ABCD$,$AC=2$,B,D 在以 AC 为直径的圆上,$SA\perp$平面 $ABCD$,$\angle DAC=\frac{\pi}{6}$,E 为 SC 的中点.

(1)若$\angle BAC=\frac{\pi}{6}$,证明:$DE\perp AB$;

(2)当二面角 $D-SC-A$ 的正切值为$\sqrt{6}$时,求点 B 到平面 SCD 距离的最大值.



20. 已知将函数$f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}-\omega x\right)(0<\omega<4)$的图像向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度后得到函数$g(x)$的图像关于原点中心对称.

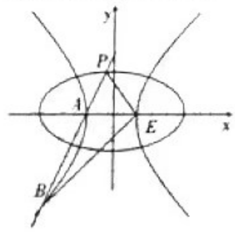
(1)求函数$f(x)$的解析式;

(2)若三角形 ABC 满足 $BC=2f\left(\frac{\pi}{12}\right)$,$M$,$N$ 是边 BC 上的两点,且$\angle BAM=\angle CAN$,$\frac{BM\cdot BN}{CM\cdot CN}=\frac{1}{2}$,求三角形 ABC 面积的取值范围.

21. 已知椭圆$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1(a_1>b_1>0)$与双曲线$\frac{x^2}{a_2^2}-\frac{y^2}{b_2^2}=1(a_2>0,b_2>0)$有共同的焦点,双曲线的左顶点为$A(-1,0)$,过 A 斜率为$\sqrt{3}$的直线和双曲线仅有一个公共点 A,双曲线的离心率是椭圆离心率的 3 倍.

(1)求双曲线和椭圆的标准方程;

(2)椭圆上存在一点 $P(x_P,y_P)(-1<x_P<0,y_P>0)$,过 AP 的直线 l 与双曲线的左支相交于与 A 不重合的另一点 B,若以 BP 为直径的圆经过双曲线的右顶点 E,求直线 l 的方程.



22. 现定义:$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2^3-x_1^3}$为函数$f(x)$在区间$(x_1,x_2)$上的立方变化率.已知函数$f(x)=e^{ax}$,$g(x)=\left(x+\frac{2}{a}\right)\ln\left(x+\frac{2}{a}\right)+x$.

(1)若存在区间(x_1,x_2),使得$f(x)$的值域为$(2x_1,2x_2)$,且函数$f(x)$在区间(x_1,x_2)上的立方变化率为大于 0,求实数 a 的取值范围;

(2)若对任意区间(x_1,x_2),$f(x)$的立方变化率均大于$g(x)$的立方变化率,求实数 a 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。