

数 学

(满分:150分 考试时间:120分钟)

审题人:36中 李永阳

注意事项:

1. 答题时,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时,必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其他答案标号。
3. 答非选择题时,必须使用黑色墨水笔或黑色签字笔,将答案书写在答题卡规定的位置上,写在试题卷、草稿纸上无效。
4. 考试结束后,将试题卷和答题卡一并交回。

第 I 卷(选择题,共 60 分)

一、单选题(本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题所给的四个选项中,有且只有一项是符合题目要求的)

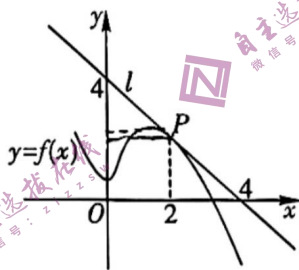
1. 已知集合 $U = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$, $A = \{x \in \mathbb{Z} | (x+2)(x-1) \leq 0\}$, 则 $\complement_U A =$ ()

- A. $\{-2, -1, 0, 1\}$ B. $\{-2, -1, 0\}$ C. $\{-4, -3, 2\}$ D. $\{-1, 0, 1\}$

2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x-1, & x > 0 \\ 4x, & x \leq 0 \end{cases}$, 若 $f(a) = -\frac{1}{2}$, 则实数 a 的值为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{1}{8}$ 或 $-\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{8}$ 或 $\frac{1}{2}$

3. 如图, 直线 l 是函数 $y=f(x)$ 的图象在点 $P(2, y)$ 处的切线, 则 $f(2) + f'(2) =$ ()



- A. -3 B. -2 C. 2 D. 1

4. 已知随机变量 $X \sim B(n, p)$, 若 $E(X) = 1$, $D(X) = \frac{4}{5}$, 则 $P(X=4) =$ ()

- A. $\frac{4}{625}$ B. $\frac{32}{125}$ C. $\frac{1}{125}$ D. $\frac{1}{25}$

5. 已知函数 $f(x)$ 满足性质: ①在定义域上有 $f(-x) + f(x) = 0$; ② $\forall x_1, x_2 \in (0, 1)$, 恒有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_2 - x_1} < 0$, 则函数 $f(x)$ 可能为 ()

- A. $f(x) = -2x$ B. $f(x) = \sin \frac{3}{2}x$ C. $f(x) = 3x^2$ D. $f(x) = \frac{5}{x}$

6. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_{17} < 0, a_6 + a_{13} > 0$, 则当 S_n 取得最小值时, n 的值为 ()

- A. 8 B. 9 C. 10 D. 11

7. 下列说法正确的是 ()

A. 已知 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $x > 0$ ”是“ $|x-1| < 1$ ”的充分不必要条件

B. 若不等式 $ax^2 + 2x + c > 0$ 的解集为 $\{x | -1 < x < 2\}$, 则 $\frac{c}{a} = 2$

C. 若 $a > b > c$, 则 $\frac{1}{b-c} > \frac{1}{a-c}$

D. 函数 $f(x) = x^2 + \frac{3}{x^2 + 2}$ 的最小值是 $2\sqrt{3} - 2$

8. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 其导函数为 $f'(x)$, 且满足 $f(x) > f'(x) + 1, f(0) = 2023$, 则满足不等式 $e^{-x} f(x) > e^{-x} + 2022$ 的 x 的取值范围是 ()

- A. $(2022, +\infty)$ B. $(-\infty, 2023)$ C. $(0, 2022)$ D. $(-\infty, 0)$

二、多选题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题所给的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分)

9. 下列求导运算正确的是 ()

A. $(\sin^2 x)' = \sin 2x$

B. $(3^x + \log_3 x)' = (3^x + x) \ln 3$

C. $(e^x \sqrt{x})' = \frac{3}{2} e^x \sqrt{x}$

D. $\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

10. 已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 若 x_0 满足关于 x 的方程 $2ax + b = 0$, 则下列命题为真命题的有 ()

A. $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \leq f(x_0)$

B. $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq f(x_0)$

C. $\exists x \in \mathbf{R}, f(x) \leq f(x_0)$

D. $\exists x \in \mathbf{R}, f(x) \geq f(x_0)$

11. 若存在常数 k 和 b , 使得函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 对其公共定义域上的任意实数 x 都满足 $f(x) \geq kx + b$ 和 $g(x) \leq kx + b$ 恒成立, 则称此直线 $y = kx + b$ 为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的“隔离直线”. 已知函数 $f(x) = x^2 (x \in \mathbf{R}), g(x) = -\frac{4}{x} (x > 0)$, 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 之间存在“隔离直线” $y = 4x - b$, 则实数 b 的取值可以是 ()

A. -5

B. 0

C. 4

D. 7

12. 如图, 将 n^2 个数排成 n 行 n 列的一个数阵, 该数阵第一列的 n 个数从上到下构成以 m 为公差的等差数列, 每一行的 n 个数从左到右构成以 $m (m > 0)$ 为公比的等比数列, a_{ij} 表示第 i 行第 j 个数. 已知 $a_{11} = 2, a_{13} = a_{61} + 1$, 记这 n^2 个数的和为 S . 下列结论正确的有 ()

$a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad \cdots \quad a_{1n}$

$a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \quad \cdots \quad a_{2n}$

\cdots

$a_{n1} \quad a_{n2} \quad a_{n3} \quad \cdots \quad a_{nn}$

A. $m = 3$

B. $a_{67} = 17 \times 3^7$

C. $a_{ij} = (3i-1) \cdot 3^{j-1}$

D. $S = \frac{1}{4} n(3n+1)(3^n - 1)$

第 II 卷(非选择题,共 90 分)

三、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

13. 已知某品种小麦的穗粒数 X 服从正态分布 $N(38, \sigma^2)$, 且 $P(34 \leq X \leq 42) = 0.68$, 则该品种小麦的穗粒数超过 42 粒的概率为 _____

14. 方程 $(x^2 - 4x)^2 - (x^2 - 4x) - 20 = 0$ 的解集为 _____

15. 某企业制造并出售球形瓶装的某种饮料, 瓶子的制造成本是 $1.6\pi r^2$ 分, 其中 r (单位: cm) 是瓶子的半径, 已知每 1 mL 饮料可售 0.4 分, 且能制作的瓶子的最大半径为 6 cm, 当每瓶饮料的利润最大时, 瓶子的半径为 _____ cm.

16. 已知函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} , $f(x+1) + g(x-2) = 3$, $f(x-1) - g(-x) = 1$, 且 $g(-1) = 2$, $g(x-1)$ 为偶函数, 则 $\sum_{k=1}^{83} [f(k) + g(k)] =$ _____.

四、解答题(本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (10 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_1 = 2a_1 - 3$, 且 $a_n = 2a_{n-1} - 2 (n \geq 2)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $b_n = \log_2(a_{n+1} - 2)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (12 分) 玻璃杯整箱出售, 共 3 箱, 每箱 20 只. 假设各箱含有 0, 1, 2 只残次品的概率对应为 0.8, 0.1 和 0.1. 一顾客欲购买一箱玻璃杯, 在购买时, 售货员随意取一箱, 而顾客随机查看 4 只玻璃杯, 若无残次品, 则买下该箱玻璃杯; 否则不买. 设事件 A 表示“顾客买下所查看的一箱玻璃杯”, 事件 B_i 表示“箱中恰好有 $i (i=0, 1, 2)$ 只残次品”. 求:

(1) 顾客买下所查看的一箱玻璃杯的概率 $P(A)$;

(2) 在顾客买下的一箱中, 没有残次品的概率 $P(B_0 | A)$.

19. (12 分) 已知函数 $f(x) = (x-a)^3$, 其中 a 为常数, 函数 $f'(x)$ 是其导函数, 且满足 $f'(2) = 3$, $f'(-2) = 27$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若函数 $f(x)$ 在某点处的切线过点 $M\left(\frac{5}{3}, 0\right)$, 求该切线的一般式方程.

20. (12分) 已知等差数列 $\{b_n\}$ 的首项为 -1 , 公差为 2 , 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} - a_n = b_n$.

(1) 求 a_n 取得最小值时 n 的值;

(2) 若 $a_1 = \frac{3}{4}$, 证明: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \leq \frac{4}{3}$.

21. (12分) 旅游承载着人们对美好生活的向往. 随着近些年人们收入和消费水平不断提高, 对品质生活的需求也日益升级, 旅游市场开启了快速增长的时代. 某旅游景区为吸引旅客, 提供了 A, B 两条路线方案. 该景区为进一步了解旅客对这两条路线的选择情况和满意度评价 (“好”或“一般”), 对 300 名旅客的路线选择和评价进行了统计, 如下表:

	A 路线		B 路线		合计
	好	一般	好	一般	
男	10	20	55	35	120
女	90	30	20	40	180
合计	100	50	75	75	300

(1) 根据以上数据, 在犯错误的概率不超过 0.1% 的前提下, 可以认为对 A, B 两条路线的选择与性别有关吗?

(2) 某人计划到该景区旅游, 预先在网上了解了对这两条路线的评价, 假设他分别看了两条路线各三条评价 (评价 “好” 或 “一般” 的可能性以前面统计的占比为参考), 若评价为 “好” 的计 5 分, 评价为 “一般” 的计 2 分, 以期望值作为参考, 那么你认为这个人会选择哪一条路线? 请用计算说明理由.

附 $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a+b+c+d$.

$\alpha = P(\chi^2 \geq k)$	0.05	0.01	0.001
k	3.841	6.635	10.828

22. (12分) 已知函数 $f(x) = 2e^x - x^2 - 2ax - a^2$.

(1) 若 $a > 0$, 讨论函数 $g(x) = f(x) + x^2$ 的单调性和极值情况;

(2) 若 $a = 1$, 求证: 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) > 0$;

(3) 若 $a \in [-\sqrt{2}, 2 - \ln 2]$, 求证: 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 0$.