唐山市2023年普通高等学校招生统一考试第二次模拟演练

数 学 参 考 答 案

一．选择题：1～4．BDBA　　5～8．CCBD

二．选择题：9．BC　　10．ABD　　11．AD　　12．BCD

三．填空题：13．12　　14．2　　15．五边形，$2\sqrt{13}+\sqrt{2}$　　16．$\left[\frac{1}{e},\ +\infty\right)$

第15题 第一空2分，第二空3分

四．解答题：（若有其他解法，请参照给分）

17．解：

（1）因为 $2\sin A\sin B\cos C=\sin^2 C$，

由正弦定理得，$2ab\cos C=c^2$，　　…2分

由余弦定理得，$a^2+b^2-c^2=c^2$，　　…2分

整理得，$\dfrac{a^2+b^2}{c^2}=2$．　　…1分

（2）$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C$　　…1分

因为 $c=2$，由（1）可得 $\cos C=\dfrac{2}{ab}$，　　…1分

则 $\sin C=\sqrt{1-\dfrac{4}{a^2b^2}}$　　…1分

又 $2c^2=8=a^2+b^2\geqslant 2ab$，即 $ab\leqslant 4$，　　…1分

于是 $S=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2-4}\leqslant\dfrac{1}{2}\sqrt{16-4}=\sqrt{3}$

所以 S 的最大值为 $\sqrt{3}$．　　…1分

18．解：

（1）①

	采桑	不采桑	合计
患皮炎	4	2	6
未患皮炎	1	18	19
合计	5	20	25

…2分

②零假设为 H_0：患皮炎与采桑之间无关联．根据列联表中的数据，经计算得到

$$\chi^2=\frac{25\times(4\times18-2\times1)^2}{6\times19\times5\times20}$$　　…2分

$$=\frac{1225}{114}\approx 10.746>7.879=x_{0.005}.$$　　…1分

根据小概率值 $\alpha=0.005$ 的独立性检验，我们推断 H_0 不成立．

即认为患皮炎与采桑之间有关联，此推断犯错误的概率不大于0.005．　　…1分

（2）用 X 表示抽取的4人中采桑的工作人员人数，X 的取值为：2，3，4．

$P(X=2)=\dfrac{C_4^2C_2^2}{C_6^4}=\dfrac{2}{5}$，　$P(X=3)=\dfrac{C_4^3C_2^1}{C_6^4}=\dfrac{8}{15}$，　$P(X=4)=\dfrac{C_4^4C_2^0}{C_6^4}=\dfrac{1}{15}$．　　…3分

随机变量 X 的分布列为：

X	2	3	4
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

…1 分

则 $E(X)=2\times\frac{2}{5}+3\times\frac{8}{15}+4\times\frac{1}{15}=\frac{8}{3}$. …2 分

19．解：

（1）设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d，

$\begin{cases} q+q^2=1+5d, \\ q^2=1+3d, \end{cases}$ …2 分

解得 $\begin{cases} d=1, \\ q=2, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} d=-\frac{1}{4}, \\ q=-\frac{1}{2}, \end{cases}$（舍去） …1 分

故 $a_n=2^{n-1}$，$b_n=n$. …1 分

（2）由（1）知 $a_nb_n=n\cdot 2^{n-1}$，

则 $T_n=1\times 2^0+2\times 2^1+3\times 2^2+\cdots+n\cdot 2^{n-1}$，　①

则 $2T_n=1\times 2^1+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+n\cdot 2^n$.　② …1 分

由①－②得，

$-T_n=1+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}-n\cdot 2^n$ …1 分

$=\frac{1-2^n}{1-2}-n\cdot 2^n$ …1 分

$=(1-n)\cdot 2^n-1$.

所以 $T_n=(n-1)\cdot 2^n+1$. …1 分

（3）由（1）知，$a_n=2^{n-1}$，$b_n=n$，所以 $S_n=2^n-1$， …1 分

$\sum_{k=1}^{n-1}S_k(b_k-b_{k+1})=S_1\cdot(b_1-b_2)+S_2\cdot(b_2-b_3)+\cdots+S_{n-1}\cdot(b_{n-1}-b_n)$

$=(S_1+S_2+\cdots+S_{n-1})\cdot(-1)$

$=(2^1-1+2^2-1+\cdots+2^{n-1}-1)\cdot(-1)$

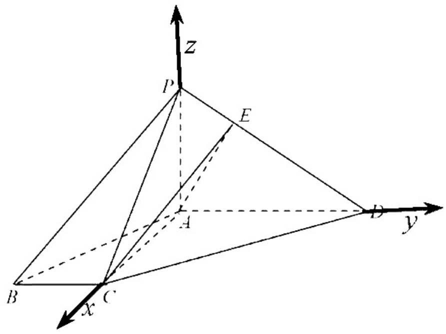
$=[2^n-2-(n-1)]\cdot(-1)$

$=(-1)\cdot(2^n-n-1)$ …2 分

所以 $S_nb_n+\sum_{k=1}^{n-1}S_k(b_k-b_{k+1})=(2^n-1)\cdot n+(-1)\cdot(2^n-n-1)=(n-1)\cdot 2^n+1$，

即 $T_n=S_nb_n+\sum_{k=1}^{n-1}S_k(b_k-b_{k+1})$. …1 分

20．解：



（1）在△ABC 中，$\angle ABC=60°$，$AB=2$，$BC=1$，

由余弦定理可得，$AC=\sqrt{3}$，…2 分

从而有 $AB^2=BC^2+AC^2$，所以 $AC\perp BC$，…1 分

$\because AD\parallel BC$，$\therefore AC\perp AD$，

$\because PD\perp AC$，$PD\cap AD=D$，

$\therefore AC\perp$ 平面 PAD，…1 分

$\because PA\subset$ 平面 PAD，$\therefore AC\perp PA$．…1 分

$\because PA\perp CD$，$AC\cap CD=C$，

$\therefore PA\perp$ 平面 $ABCD$．…1 分

（2）以 AC，AD，AP 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系 $A-xyz$，设 $AP=t$，

则 $A(0，0，0)$，$C(\sqrt{3}，0，0)$，$D(0，2，0)$，$P(0，0，t)$，$E\left(0，\frac{2}{3}，\frac{2}{3}t\right)$，…1 分

由（1）知，$AD\perp$ 平面 PAC，$\overrightarrow{AD}=(0，2，0)$是平面 PAC 的一个法向量．…1 分

设平面 EAC 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x，y，z)$，

$\overrightarrow{AC}=(\sqrt{3}，0，0)$，$\overrightarrow{AE}=\left(0，\frac{2}{3}，\frac{2}{3}t\right)$，

由 $\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}=0$，$\overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{n}=0$ 得 $\begin{cases}\sqrt{3}x=0，\\ \frac{2}{3}y+\frac{2}{3}tz=0，\end{cases}$ 取 $\boldsymbol{n}=(0，t，-1)$．…2 分

因为平面 PAC 与平面 EAC 的夹角的余弦值为$\frac{3\sqrt{10}}{10}$．

所以$|\cos\langle\overrightarrow{AD}，\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AD}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|2t|}{2\sqrt{1+t^2}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，解得 $t=3$．…1 分

所以四棱锥 P-$ABCD$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}(1+2)\times\sqrt{3}\times 3=\frac{3\sqrt{3}}{2}$．…1 分

21．解：

（1）由题意可知，$|AF|=\frac{1}{3}|AB|=3$，…1 分

由 $\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{FA}$，$x_B=-\frac{p}{2}$，$x_F=\frac{p}{2}$可得 $x_A=p$，…1 分

由抛物线的定义可知，$|AF|=p+\frac{p}{2}=2$，解得 $p=2$．…1 分

则 C 的方程为 $y^2=4x$．…1 分

（2）$E(x_0，-2)$在抛物线 C 上，所以 $x_0=1$，…1 分

设直线 MN 的方程为 $x=ty+n$，$M(x_1，y_1)$，$N(x_2，y_2)$，

将 $x=ty+n$ 代入 $y^2=4x$，得 $y^2-4ty-4n=0$．

则 $y_1+y_2=4t$，$y_1y_2=-4n$．…1 分

$k_{EM}=\frac{y_1+2}{x_1-1}=\frac{y_1+2}{\frac{y_1^2}{4}-1}=\frac{4}{y_1-2}$，同理 $k_{EN}=\frac{4}{y_2-2}$．…1 分

$k_{EM}+k_{EN}=\dfrac{4}{y_1-2}+\dfrac{4}{y_2-2}=\dfrac{4(y_1+y_2)-16}{y_1y_2-2(y_1+y_2)+4}=\dfrac{16t-16}{-4n-8t+4}=-\dfrac{4}{3}$， …2 分

整理得，$n=t-2$， …1 分

直线 MN 的方程为 $x=ty+t-2$，所以直线 MN 过定点 $T(-2,\ -1)$． …1 分

当 $ET\perp MN$ 时，点 E 到直线 MN 距离最大，且最大距离为 $|ET|=\sqrt{10}$． …1 分

22．解：

（1）因为 $f(x)=xe^{2-x}$，

所以 $f'(x)=(1-x)e^{2-x}$， …1 分

由 $f'(x)>0$，解得 $x<1$，由 $f'(x)<0$，解得 $x>1$，

所以 $f(x)$在$(-\infty,\ 1)$单调递增，在$(1,\ +\infty)$单调递减， …2 分

因此，$f(x)$在 $x=1$ 处取得极大值 e，无极小值． …1 分

（2）由（1）可知，$f(x)$在$(1,\ +\infty)$单调递减，$f(2)=2$， …1 分

且 $a>1$，$b>1$，$a\neq b$，$f(a)+f(b)=4$，

不妨设 $1<a<2<b$，

要证 $a+b<4$，

只要证 $b<4-a$，

而 $b>2$，$2<4-a<3$，且 $f(x)$在$(1,\ +\infty)$单调递减，

所以只要证 $f(b)>f(4-a)$， …1 分

即证 $4-f(a)>f(4-a)$，

即证 $f(a)+f(4-a)<4$． …1 分

即证当 $1<x<2$ 时，$f(x)+f(4-x)<4$．

令 $F(x)=f(x)+f(4-x)$，$1<x<2$，

则 $F'(x)=f'(x)-f'(4-x)=(1-x)e^{2-x}-e^{x-2}(x-3)$． …1 分

令 $h(x)=(1-x)e^{2-x}-e^{x-2}(x-3)$，$1<x<2$，

则 $h'(x)=e^{2-x}(x-2)-e^{x-2}(x-2)=(x-2)(e^{2-x}-e^{x-2})$， …1 分

因为 $1<x<2$，

所以 $x-2<0$，$e^{2-x}-e^{x-2}>0$，

所以 $h'(x)<0$，

即 $h(x)$在$(1,\ 2)$单调递减， …1 分

则 $h(x)>h(2)=0$，即 $F'(x)>0$，

所以 $F(x)$在$(1,\ 2)$单调递增， …1 分

所以 $F(x)<F(2)=2f(2)=4$．

即当 $1<x<2$ 时，$f(x)+f(4-x)<4$．

所以，原命题成立． …1 分