2022届高三开年摸底联考 新高考卷

数 学 试 卷

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上。

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为120分钟，满分150分

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.已知集合 $A=\{y|y=2^x,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x|x^2\leqslant 4\}$，则 $A\cap B=$

A.$[-2,2]$　　B.$[-2,0)$　　C.$[0,2]$　　D.$(0,2]$

2.已知复数 z 满足 $z(1+i)=2i$（i 为虚数单位），则 $|z|=$

A.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B.$\sqrt{2}$　　C.1　　D.2

3.若 $0<a<1$，则"$\log_a x>\log_a y$"是"$a^x>a^y$"的

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

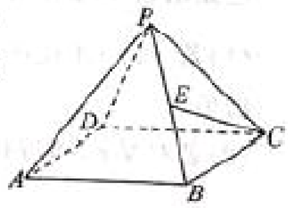
4.设函数 $f(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^{|x|}+x^2$，若 $a=f(\ln 3)$，$b=f(-\log_3 2)$，$c=f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$（$e$ 为自然对数的底数），则

A.$a>b>c$　　B.$c>b>a$　　C.$c>a>b$　　D.$a>c>b$

5.已知直线 $l:x+y-1=0$ 与圆 $C:(x-a)^2+(y+a-1)^2=1$ 交于 A,B 两点，O 为坐标原点，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 的最小值为

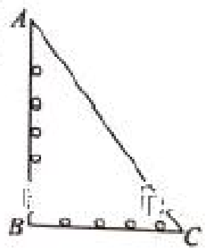
A.$-\frac{1}{2}$　　B.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C.$\sqrt{2}$　　D.$\frac{1}{2}$

6.如图，正四棱锥（底面为正方形，顶点在底面的射影为底面正方形的中心）$P-ABCD$ 中，$AB=4$，点 E 为 PB 中点，若 CE 与 PD 所成的角余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，则四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为



A.$\frac{32\sqrt{2}}{3}$　　B.$16\sqrt{2}$　　C.$\frac{32}{3}$　　D.$\frac{16}{3}$

7.右图为一个直角三角形工业部件的示意图，现在 AB 边内侧钻5个孔，在 BC 边内侧钻4个孔，AB 边内侧的5个孔和 BC 边内侧的4个孔可连成20条线段，在这些线段的交点处各钻一个孔，则这个部件上最多可以钻的孔数为



A.190　　B.199

C.69　　D.60

8.已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$，直线 $l:y=2\sqrt{2}x-\sqrt{2}p$ 与 C 交于 A,B 两点，点 A,B 在准线上的射影分别为点 A_1,B_1，若四边形 A_1ABB_1 的面积为 $3\sqrt{2}$，则 $p=$

A. 2　　B. $\frac{4}{3}$　　C. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$　　D. 4

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9.设函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2(x-1),x>2,\\2^x-3,x\leq 2,\end{cases}$ 则以下结论正确的为

A. $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数

B. $f(x)$ 有唯一零点 x_0，且 $1<x_0<2$

C. 若 $f(m)=5$，则 $m=33$

D. $f(x)$ 的值域为 R

10.小明用某款手机性能测试 APP 对 10 部不同品牌的手机的某项性能进行测试，所得的分数按从小到大的顺序(相等数据相邻排列)排列为：81，84，84，87，x，y，93，96，96，99，已知总体的中位数为 90，则

A. $x+y=180$

B. 该组数据的均值一定为 90

C. 该组数据的众数一定为 84 和 96

D. 若要使该总体的标准差最小，则 $x=y=90$

11.将函数 $g(x)=\frac{1}{2^{|\omega x-\varphi|}}A\sin\omega x(A>0,\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的图象向左平移 $\frac{\varphi}{\omega}$ 个单位后得到函数 $y=f(x)$ 的图象，若对 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(1-x)=f(x-1)$，且 $f(-1)=f(3)=0$，则 ω 的可能取值为

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. π　　C. $\frac{3\pi}{2}$　　D. 2π

12.在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2+a_4+a_6=285$，$na_n=(n-1)a_{n+1}+101(n\in\mathbf{N}^*)$，则以下结论正确的为.

A. 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列

B. $a_1=99$

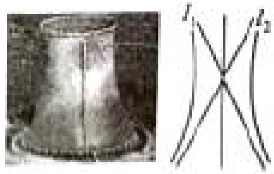
C. 当 S_n 取最大值时，n 的值为 51

D. 当数列 $\{a_na_{n+1}a_{n+2}\}(n\in\mathbf{N}^*)$ 的前 n 项和取得最大值时，n 的值为 49 或 51

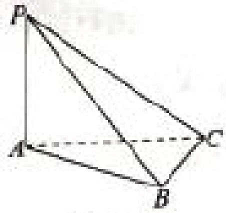
三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.已知 $\alpha\in(0,\pi)$，$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，则 $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=$______.

14.建在水资源不十分充足的地区的火电厂为了节约用水，需建造一个循环冷却水系统(冷却塔)，以使水可循环使用.右图是世界最高的电厂冷却塔——中国国家能源集团胜利电厂冷却塔，该冷却塔高 225 米，创造了"最高冷却塔"的吉尼斯世界纪录.该冷却塔的外形可看作双曲线的一部分绕其虚轴旋转所成的曲面，如图：已知直线 l_1,l_2 为该双曲线的两条渐近线，l_1，l_2 向上的方向所成的角的正切值为 $\frac{5}{12}$，则该双曲线的离心率为____



15.如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$平面 ABC，$AB\perp BC$，$PA=AB=2$，若三棱锥的外接球体积为 $4\sqrt{3}\pi$，则异面直线 PB 与 AC 所成角为________.



16.已知函数 $f(x)=\sin^2 x+2\cos x$ 的图象上存在点 $(x_0,f(x_0))$ 使得 $e^{f(x_0)}-a=f(x_0)$（e 为自然对数的底数），则实数 a 的取值范围为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，且 $S_n=2S_{n-1}+n(n\geq 2,n\in N^*)$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)设 $b_n=(2n-1)(a_n+1)$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

18.（12 分）

在三角形 ABC 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$a=2b$，且 $2c\sin B=a\cos\left(C-\frac{\pi}{6}\right)$.

(1)求角 C；

(2)E 为三角形 ABC 所在平面内的一点，$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，且 $|\overrightarrow{AE}|=2$，求线段 CE 的长.

19.（12 分）

在东京奥运会中，甲、乙、丙三名跳水运动员参加小组赛，已知甲晋级的概率为 $p(0<p<1)$，乙、丙晋级的概率均为 $q(0<q<1)$，且三人是否晋级相互对立.

(1)若甲成功晋级的概率与乙、丙两人均没有晋级的概率相等，与乙、丙两人有且仅有一人晋级的概率也相等，求 p,q；

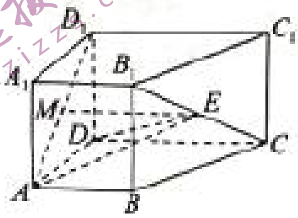
(2)若 $p=\frac{1}{2}$，记三个人中成功晋级的人数为 ξ，若 $\xi=0$ 时和 $\xi=3$ 时的概率相等，求 $E(\xi)$.

20.(12分)

如图,四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,四边形 A_1ADD_1 为矩形,且平面 $A_1ADD_1\perp$ 平面 $ABCD$,$AB/\!/CD$,$AB=AD=A_1A=\frac{1}{2}CD$,$\angle DAB=\frac{\pi}{2}$,M,E 分别为 AD_1,B_1C 的中点.

(1)证明:$ME/\!/$平面 DCC_1D_1;

(2)求 AE 与平面 B_1BCC_1 所成的角的正弦值.



21.(12分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$,且过左焦点和上顶点的直线 l 与圆$(x-\sqrt{3})^2+y^2=3$ 相切.

(1)求椭圆 C 的方程;

(2)若直线 $m:y=kx+n(k>0,n>0)$与椭圆 C 交于 A,B 两点,O 为坐标原点,且直线 OA,OB,AB 的斜率之和为 0.求三角形 OAB 面积的最大值.

22.(12分)

已知函数 $f(x)=ae^{ax}+a(a>0)$,$g(x)=2\left(x+\frac{1}{x}\right)\ln x$.

(1)若 $f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线与 $g(x)$在点$(1,g(1))$处的切线互相平行,求实数 a 的值;

(2)若对 $\forall x>0$,$f(x)\geq g(x)$恒成立,求实数 a 的取值范围.

2022届高三开年摸底联考　新高考卷

数学参考答案及评分意见

1.D 【解析】$A=(0,+\infty)$，$B=[-2,2]$，所以 $A\cap B=(0,2]$.

2.B 【解析】$|z|=\frac{|2i|}{|1+i|}=\sqrt{2}$.

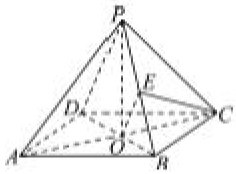
3.A 【解析】由 $0<a<1$，$\log_a x>\log_a y\Leftrightarrow y>x>0$，$a^x>a^y\Leftrightarrow y>x$，故为充分不必要条件.

4.D 【解析】函数 $f(x)$的为偶函数且在$(0,+\infty)$上单调递增，又 $\ln 3>1$，$0<\log_5 2<\log_5\sqrt{5}=\frac{1}{2}$，

$1>\frac{1}{\sqrt{e}}>\frac{1}{2}$，故 $a>c>b$.

5.A 【解析】直线 l 过圆心 $C(a,1-a)$，所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CA})\cdot(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB})=(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CA})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{CA})=|\overrightarrow{OC}|^2-1$，当 OC 垂直直线 l 时，$|\overrightarrow{OC}|^2$ 取得最小值$\frac{1}{2}$，故$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$的最小值为$-\frac{1}{2}$.

6.A 【解析】如图，连接 AC，BD，设交点为 O，连接 PO，OE，



则 $OE\parallel PD$，所以$\angle CEO$ 或其补角即为 CE 与 PD 所成的角，

设 $PD=2x(x>\sqrt{2})$，则 $OE=x$，易知 $OE\perp OC$，$\cos\angle CEO=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$CE^2=OE^2+OC^2=x^2+8$，故 $CE=\sqrt{x^2+8}$，所以$\cos\angle CEO=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{x}{\sqrt{x^2+8}}$，解得 $x=2$，

$PO=\sqrt{PD^2-OD^2}=2\sqrt{2}$，所以 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}\times4\times4\times2\sqrt{2}=\frac{32\sqrt{2}}{3}$.

7.C 【解析】在 AB 边内侧的 5 个孔和 BC 边内侧的 4 个孔中各取两个可构成四边形，当这些四边形对角线的交点不重合时，钻孔最多，所以最多可以钻的孔数为 $C_5^2C_4^2+9=69$ 个.

8.B 【解析】由题可知直线 l 过抛物线的焦点，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立方程可得 $4x^2-5px+p^2=0$，

所以 $x_1+x_2=\frac{5}{4}p$，$x_1x_2=\frac{1}{4}p^2$，又 A，B 到准线的距离分别为 $x_1+\frac{p}{2}$，$x_2+\frac{p}{2}$，所以$|AB|=x_1+x_2+p=\frac{9}{4}p$，四边形 A_1ABB_1 为直角梯形，其高为 $h=\frac{2\sqrt{2}}{3}|AB|=\frac{3\sqrt{2}}{2}p$，所以 $S=\frac{1}{2}\times|AB|\times h=\frac{27\sqrt{2}}{16}p^2=3\sqrt{2}$，故 $p=\frac{4}{3}$.

9.BC 【解析】由题，$f(2)=1$，$f(3)=1$，A 错误；$f(x)$的值域为$(0,+\infty)\cup(-3,1]=(-3,+\infty)$，D 错误；

由图象已知，$f(x)$有唯一零点 x_0，$f(x)$在$(-\infty,2]$上单调递增，且 $f(1)<0$，$f(2)>0$，B 正确；当 $x\leqslant2$ 时，$2^x-3\leqslant1$，

故 $\log_2(m-1)=5$，解得 $m=33$，C 正确.

10.ABD 【解析】因为总体的中位数为 90，所以 $x+y=180$，均值为 90，A 正确，B 正确，当 $x=y=90$ 时，众数为 84，90，96，当 $x=87$，$y=93$ 时，众数为 84，87，93，96，故 C 错误；要使该总体的标准差最小，即方差最小，即$(x-90)^2+(y-90)^2$ 最小，

又$(x-90)^2+(y-90)^2\geqslant\frac{(x+y-180)^2}{2}=0$，当且仅当 $x-90=y-90$ 时，即 $x=y=90$ 时等号成立，D 正确.

11.AC 【解析】由题函数 $f(x)=\frac{1}{2^{|\omega|}}A\sin(\omega x+\varphi)$为偶函数，所以 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，又 $0<\varphi<\pi$，

所以 $\varphi=\frac{\pi}{2}$，故 $f(x)=\frac{1}{2^{|\omega|}}A\cos\omega x$，$f(-1)=\frac{1}{2^{\omega}}A\cos\omega=0$，所以 $\omega=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

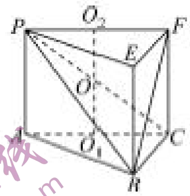
$f(3)=\frac{1}{8^{\omega}}A\cos3\omega=0$，所以 $3\omega=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，可得 ω 和 3ω 均为$\frac{\pi}{2}$的奇数倍，故 ω 的可能取值为$\frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{2}$.

12.ACD 【解析】易得 $a_1=101$，B 错误；由 $na_n=(n-1)a_{n+1}+101$，得$(n+1)a_{n+1}=na_{n+2}+101$，作差得$(n+1)a_{n+1}-na_n=na_{n+2}-(n-1)a_{n+1}$，即 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$，所以数列$\{a_n\}$为等差数列，A 正确；$a_1=101$，$a_4=95$，可得公差 $d=-2$，$a_n=103-2n$，$a_{51}=1>0$，$a_{52}=-1<0$，$a_{53}=-3<0$，当 S_n 取最大值时，n 的值为 51，C 正确；又 $a_{50}=3$，$a_{51}=1$，$a_{52}=-1$，$a_{53}=-3$，设 $b_n=a_na_{n+1}a_{n+2}$，当 $n\leqslant49$ 时，$b_n>0$，$b_{50}=-3$，$b_{51}=3$，当 $n\geqslant52$ 时，$b_n<0$，所以当 $n=49$ 或 51 时，$\{a_na_{n+1}a_{n+2}\}(n\in\mathbf{N}^*)$的前 n 项和取得最大值，D 正确.

13.$\frac{1}{10}$ 【解析】由 $\alpha\in(0,\pi)$，$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$得 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}{2}=\frac{1-\sin\alpha}{2}=\frac{1}{10}$.

14. $\sqrt{26}$ 【解析】设一条渐近线向上的方向与虚轴向上的方向所成的角为 α，则 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{5}{12}$，得 $\tan\alpha=\frac{1}{5}$ 或 $\tan\alpha=-5$（舍），即 $\frac{a}{b}=\frac{1}{5}$，故 $\frac{b}{a}=5$，所以 $e^2-1=25$，解得 $e=\sqrt{26}$.

15. $\frac{\pi}{3}$ 【解析】如图，将三棱锥补成三棱柱，取 AC 中点 O_1，PF 中点 O_2，



外接球球心即为 O_1O_2 的中点 O，设外接球半径为 R，则 $\frac{4}{3}\pi R^3=4\sqrt{3}\pi$，

得 $R=\sqrt{3}$，所以 $\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{4+BC^2}}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$，得 $BC=2$，由 $AC\parallel PF$，所以

$\angle BPF$ 或其补角即为异面直线所成的角，易得 $PB=BF=PF=2\sqrt{2}$，所以异面直线 PB 与 AC 所成角为 $\frac{\pi}{3}$.

16. $[1,e^2-2]$ 【解析】$f(x)=\sin^2x+2\cos x=-\cos^2x+2\cos x+1=-(\cos x-1)^2+2$，由 $-1\leqslant\cos x\leqslant1$ 得 $-2\leqslant f(x)\leqslant2$，所以存在 $-2\leqslant t\leqslant2$，使得 $e^t-a=t$ 成立，即 $a=e^t-t$ 成立，设 $g(t)=e^t-t$，

则 $g'(t)=e^t-1$，易知当 $-2\leqslant t<0$ 时，$g'(t)<0$，$g(t)$ 单调递减，当 $0<t\leqslant2$ 时，$g'(t)>0$，$g(t)$ 单调递增，所以 $g(t)_{\min}=g(0)=1$，

又 $g(-2)=2-e^{-2}$，$g(2)=e^2-2$，$e^2-2>2-e^2$，故 $1\leqslant a\leqslant e^2-2$，所以实数 a 的取值范围为 $[1,e^2-2]$.

17.【解析】(1) 由 $S_n=2S_{n-1}+n\ (n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$ 得：

$S_{n+1}=2S_n+n+1$，作差得

即 $a_{n+1}=2a_n+1$，………………………………………………………………………………………… 1 分

即 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$

所以数列 $\{a_n+1\}(n\geqslant2)$ 为以 2 为公比的等比数列，………………………………………………… 3 分

又 $a_1=1$，由 $S_2=a_1+a_2=2a_1+2$，得 $a_2=3$，

所以 $a_n+1=4\times2^{n-2}=2^n\ (n\geqslant2)$，

因为 $a_1+1=2$ 符合，

故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^n-1$. ………………………………………………………………… 5 分

(2) $b_n=(2n-1)\times2^n$，

所以 $T_n=1\times2+3\times2^2+5\times2^3+\cdots+(2n-1)\times2^n$，………………………………………… 6 分

$2T_n=1\times2^2+3\times2^3+5\times2^4+\cdots+(2n-1)\times2^{n+1}$，

作差得 $-T_n=1\times2+2\times2^2+2\times2^3+\cdots+2\times2^n-(2n-1)\times2^{n+1}$. ………………………… 8 分

$=2+2\times\frac{4\times(1-2^{n-1})}{1-2}-(2n-1)\times2^{n+1}$.

$=(3-2n)\times2^{n+1}-6$. …………………………………………………………………………………… 9 分

所以 $T_n=(2n-3)\times2^{n+1}+6$. …………………………………………………………………………… 10 分

18.【解析】(1) 因为 $a=2b$，由 $2c\sin B=a\cos\left(C-\frac{\pi}{6}\right)$ 得 $c\sin B=b\cos\left(C-\frac{\pi}{6}\right)$，……………………… 1 分

由正弦定理得 $\sin C\sin B=\sin B\cos\left(C-\frac{\pi}{6}\right)$，………………………………………………… 3 分

因为 $0<B<\pi$，所以 $\sin B\neq0$，

故 $\sin C=\cos\left(C-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C$，

得 $\frac{1}{2}\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C$，即 $\tan C=\sqrt{3}$，…………………………………………………… 5 分

又 $0<C<\pi$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$. ……………………………………………………………………………… 6 分

(2) 由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=4b^2+b^2-2b^2=3b^2$，

所以 $a^2=b^2+c^2$，故 $A=\frac{\pi}{2}$. ………………………………………………………………………… 8 分

所以四边形 $ABEC$ 为矩形，……………………………………………………………………………… 10 分

所以 $AE=BC=2b=2$，

所以 $CE=AB=\sqrt{3}b=\sqrt{3}$. …………………………………………………………………………… 12 分

19.【解析】(1)乙、丙两人均没有晋级的概率为$(1-q)^2$，

乙、丙两人有且仅有一人晋级的概率为$C_2^1q(1-q)$，…………………………………… 2分

故$\begin{cases}p=(1-q)^2,\\ p=C_2^1q(1-q),\end{cases}$

解得 $p=\frac{4}{9}$，$q=\frac{1}{3}$. …………………………………… 5分

(2)ξ 的所有可能取值为0，1，2，3.

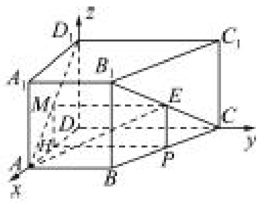
$P(\xi=0)=\frac{1}{2}(1-q)^2$，$P(\xi=3)=\frac{1}{2}q^2$，…………………………………… 7分

由题知$\frac{1}{2}(1-q)^2=\frac{1}{2}q^2$，解得 $q=\frac{1}{2}$，…………………………………… 8分

所以 $\xi\sim B\left(3,\frac{1}{2}\right)$，…………………………………… 10分

所以 $E(\xi)=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$. …………………………………… 12分

20.【解析】(1)证明：如图，分别取 AD 和 BC 的中点 H，P，连接 MH，HP，PE，…………………… 1分



则 $MH\parallel DD_1$，$MH=\frac{1}{2}DD_1$，$PE\parallel CC_1$，$PE=\frac{1}{2}CC_1$，

所以 $MH\parallel PE$，$MH=PE$，

所以四边形 $MHPE$ 为平行四边形，…………………………………… 3分

所以 $ME\parallel PH$，又 $PH\parallel CD$，所以 $ME\parallel CD$，

因为 $CD\subset$平面 DCC_1D_1，$ME\not\subset$平面 DCC_1D_1，

所以 $ME\parallel$平面 DCC_1D_1. …………………………………… 4分

(2)因为四边形 A_1ADD_1 为矩形，所以 $DD_1\perp AD$，

因为平面 $A_1ADD_1\perp$平面 $ABCD$，所以 $D_1D\perp$平面 $ABCD$，故 $D_1D\perp CD$，

因为 $AB\parallel CD$，$\angle DAB=\frac{\pi}{2}$，所以 $CD\perp AD$，…………………………………… 6分

以 D 为坐标原点，分别以 DA，DC，DD_1 所在直线为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，

设 $AB=1$，则 $A(1,0,0)$，$B(1,1,0)$，$C(0,2,0)$，$B_1(1,1,1)$，$E\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$，

所以 $\overrightarrow{BB_1}=(0,0,1)$，$\overrightarrow{BC}=(-1,1,0)$，…………………………………… 8分

设平面 B_1BCC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}z=0,\\ -x+y=0,\end{cases}$ 不妨令 $x=1$，则 $y=1$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,1,0)$，…………………………………… 10分

又$\overrightarrow{AE}=\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$，

所以 $\cos\langle\overrightarrow{AE},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{11}}{2}}=\frac{\sqrt{22}}{11}$，…………………………………… 11分

所以 AE 与平面 B_1BCC_1 所成的角的正弦值为$\frac{\sqrt{22}}{11}$. …………………………………… 12分

21.【解析】(1)设椭圆的半焦距为 c，则$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$……① …………………………………… 1分

直线 l：$y=\frac{b}{c}x+b$，则$\frac{|\sqrt{3}b+bc|}{\sqrt{b^2+c^2}}=\sqrt{3}$，即$\frac{|\sqrt{3}b+bc|}{a}=\sqrt{3}$……② …………………………………… 3分

又 $a^2=b^2+c^2$……③

由①②③解得 $a^2=4$，$b^2=1$，

所以求椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. …………………………………… 5分

(2)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

联立$\begin{cases} y=kx+n, \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1, \end{cases}$整理得$(1+4k^2)x^2+8knx+4n^2-4=0$，

所以$\Delta=64k^2n^2-4(1+4k^2)(4n^2-4)>0$，得$k^2>\dfrac{n^2-1}{4}$

$x_1+x_2=-\dfrac{8kn}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4n^2-4}{1+4k^2}$，…………………………………………7分

设直线OA，OB的斜率分别为k_1，k_2，则$k_1+k+k_2=0$，

即$\dfrac{y_1}{x_1}+k+\dfrac{y_2}{x_2}=\dfrac{kx_1+n}{x_1}+\dfrac{kx_2+n}{x_2}+k=3k+\dfrac{n(x_1+x_2)}{x_1x_2}=\dfrac{k(n^2-3)}{n^2-1}=0$，

所以$n^2=3$，

又$n>0$，所以$n=\sqrt{3}$，…………………………………………9分

所以$k^2>\dfrac{n^2-1}{4}=\dfrac{1}{2}$，

$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_2-x_1|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\dfrac{4\sqrt{(1+k^2)(4k^2-2)}}{1+4k^2}$，

原点O到直线l的距离$d=\dfrac{|n|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+k^2}}$，

所以$S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot d=\dfrac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{4k^2-2}}{1+4k^2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{4k^2-2}+\dfrac{3}{\sqrt{4k^2-2}}}\leqslant\dfrac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{\sqrt{4k^2-2}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{4k^2-2}}}}=1$，…………11分

当且仅当$\sqrt{4k^2-2}=\dfrac{3}{\sqrt{4k^2-2}}$时，即$k^2=\dfrac{5}{4}$时等号成立，

所以三角形OAB面积的最大值为1. …………………………………………12分

22.【解析】(1)$f'(x)=a^2e^{ax}$，所以$f'(0)=a^2$，…………………………………………1分

$g'(x)=2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\ln x+\dfrac{2}{x^2}+2$，所以$g'(1)=4$，…………………………………………2分

由题，$a^2=4$，又$a>0$，所以$a=2$. …………………………………………4分

(2)由$f(x)\geqslant g(x)$得：$a(e^{ax}+1)\geqslant2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\ln x$，即$ax(e^{ax}+1)\geqslant(x^2+1)\ln x^2$，

即$(e^{ax}+1)\ln e^{ax}\geqslant(x^2+1)\ln x^2$，…………………………………………5分

设$h(x)=(x+1)\ln x$，

则$h(e^{ax})=(e^{ax}+1)\ln e^{ax}$，$h(x^2)=(x^2+1)\ln x^2$，…………………………………………6分

$h'(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}+1$，设$m(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}+1$，…………………………………………8分

$m'(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$，所以当$0<x<1$时，$m'(x)<0$，$m(x)$单调递减，当$x>1$时，$m'(x)>0$，$m(x)$单调递增，

所以$m(x)_{min}=h'(x)_{min}=h'(1)=2>0$，

所以$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，所以$e^{ax}\geqslant x^2$对$\forall x>0$恒成立，…………………………10分

即$a\geqslant\dfrac{2\ln x}{x}$对$\forall x>0$恒成立，

设$n(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$，则$n'(x)=\dfrac{2(1-\ln x)}{x^2}$，

易知当$0<x<e$时，$n'(x)>0$，$n(x)$单调递增，当$x>e$时，$n'(x)<0$，$n(x)$单调递减，

$n(x)_{max}=n(e)=\dfrac{2}{e}$，故$a\geqslant\dfrac{2}{e}$，

所以实数a的取值范围为$\left[\dfrac{2}{e},+\infty\right)$. ……………………………………

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。