

七校联合体 2022 届高三第一次联考考试 (8 月)

数学科目

命题学校: 中山一中 命题人: 审题人:

(满分 150 分, 考试用时 120 分钟)

第一部分选择题 (共 60 分)

一、单项选择题: 本题共 8 道小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x \mid x^2 < 4\}$, $B = \{x \mid x > 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()

A. $\{x \mid 0 < x < 2\}$ B. $\{x \mid x > -2\}$ C. $\{x \mid -2 < x \leq 0\}$ D. $\{x \mid 0 < x < 4\}$

2. 已知复数 z 满足 $(1+i)z = (1-i)$, 则复数 z 的模 $|z| =$ ()

A. 0 B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. 2

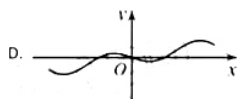
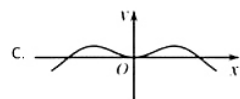
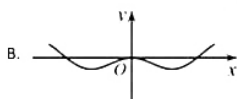
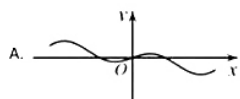
3. 做志愿者参与社区服务是学生参加社会公益活动的主要途径, 某个星期日有 4 名学生志愿者随机平均分配到 A、B 两个社区进行垃圾分类宣传活动, 则其中甲乙两人都被分配到 A 社区的概率是 ()

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{3}$

4. 二项式 $\left(x - \frac{\sqrt{2}}{x}\right)^6$ 展开式中常数项是 ()

A. 20 B. -20 C. $40\sqrt{2}$ D. $-40\sqrt{2}$

5. 函数 $f(x) = \frac{1-2^x}{1+2^x} \cdot \cos x$ 的图像的大致形状是 ()



6. 已知实数 α, β , " $\alpha + \beta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ " 是 " $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha + \sin\beta$ " 的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 故宫是世界上现存规模最大、保存最为完整的木质结构古建筑群，故宫宫殿房檐设计恰好使北房在冬至前后阳光满屋，夏至前后屋檐遮荫，已知北京地区夏至前后正午太阳高度角为 $75^{\circ}C$ ，冬至前后正午太阳高度角约为 $30^{\circ}C$ ，图 1 是顶部近似为正四棱锥、底部近似为正四棱柱的宫殿，图 2 是其示意图，则其出檐 AB 的长度（单位：米）约为（ ）



图1

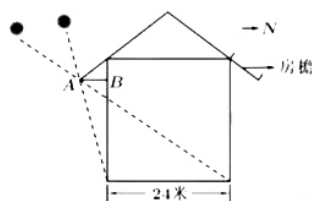


图2

- A. 3 B. 4 C. $6(\sqrt{3} - 1)$ D. $3(\sqrt{3} + 1)$

8. 已知点 P 在 $x + y = 4$ 上，过点 P 做圆 O: $x^2 + y^2 = 4$ 的两条切线，切点分别为 A, B，则点 M (3, 2) 到直线 AB 距离的最大值为（ ）

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $\sqrt{5}$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的对 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知函数 $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{4}) \cos(x - \frac{\pi}{4})$ ，则（ ）

- A. $f(x)$ 是周期为 π 的周期函数 B. $f(x)$ 的值域是 $[-1, 1]$ C. $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增
D. 将 $f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度后，可得一个奇函数的图像

10. 设 F_1, F_2 分别是双曲线 C: $\frac{x^2}{s+t} - \frac{y^2}{s-t} = 1$ 的左、右焦点，且 $|F_1F_2| = 8$ ，则下列结论正确的是（ ）

- A. $s = 8$ B. t 的取值范围是 $(-8, 8)$
C. F_1 到渐近线的距离随着 t 的增大而减小 D. 当 $t = 4$ 时，C 的实轴长是虚轴长的 3 倍

11. 已知两个不为零的实数 x, y 满足 $x < y$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $3^{x-y} > 1$ B. $xy < y^2$ C. $|x| < |y|$ D. $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} < e^x - e^y$

12. 英国数学家牛顿在 17 世纪给出了一种求方程近似根的方法—牛顿迭代平法, 做法如下: 如图设 r 是 $f(x) = 0$ 的根, 选取 x_0 作为 r 的初始近似值, 过点 $(x_0, f(x_0))$ 作曲线 $y = f(x)$ 的切线

$l: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, 则 l 与 x 轴的交点的横坐标 $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ ($f'(x_0) \neq 0$), 称 x_1

是 r 的一次近似值; 过点 $(x_1, f(x_1))$ 作曲线 $y = f(x)$ 的切线, 则该切线与 x 轴的交点的横坐标 x_2 , 称 x_2

是 r 的二次近似值; 重复以上过程, 得 r 的近似值序列, 其中 $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ ($f'(x_n) \neq 0$), 称 x_{n+1}

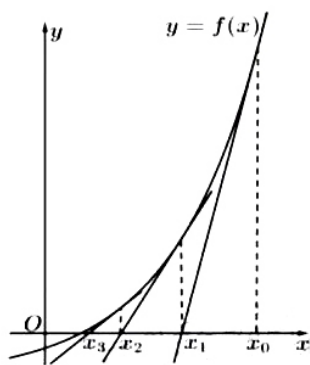
是 r 的 $n+1$ 近似值, 这种求方程 $f(x) = 0$ 近似解的方法称为牛顿迭代法. 若使用该方法求方程 $x^2 = 2$ 的近似解, 则 ()

A. 若取初始近似值为 1, 则该方程的二次近似值为 $\frac{17}{12}$

B. 若取初始近似值为 2, 则该方程的二次近似值为 $\frac{17}{12}$

C. $x_4 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$

D. $x_4 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} + \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} + \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$



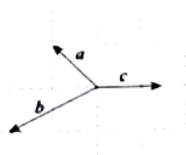
第二部分非选择题 (共 90 分)

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 函数 $f(x) = 2x + \cos x$ 在点 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形面积是 _____

14. 试写出一个离心率为 $\frac{1}{2}$ 焦点在 y 轴上的椭圆的标准方程 _____

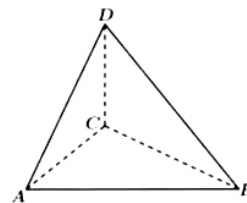
15. 向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 在边长为 1 的正方形网格中的位置如图所示, 若 \vec{e} 为与 \vec{d} 同方向的单位向量, 则 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{e} =$ _____



16. 《九章算术》是我国古代数学名著，它在几何学中的研究比西方早一千多年，书中将四个面都为直角三角形的四面体称为鳖臑，在鳖臑 ABCD 的四个直角三角形中，BD 是 Rt△BAD 和 Rt△BCD 的斜边，且所有直角三角形斜

边长分别为 $AD = \sqrt{5}, BC = \sqrt{13}, BD = \sqrt{14}$ ，它的所有顶点都在球 O 的

球面上，则球 O 的体积为 _____。



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分) 在① $a_4 = 2a_2$ ，② $b_3 - b_2 = 4$ ，③ $T_3 = 6$ 这三个条件中任选一个，补充在下面的问题中，若问题中正整数 k 存在，求 k 的值；若问题中的正整数 k 不存在，说明理由。

问题：已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，各项为正的等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，

$T_1 = 2S_1 = 2, S_3 = T_2$ ，且 _____，是否存在正整数 k 使 $T_5 \leq 2S_k \leq T_6$ 成立？

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分。

18. (12 分) 在 △ABC 中，内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c. $a = \sqrt{3}c \sin B + b \cos C$ 点 D 为 AB 边

上的一点， $AD = 2BD = 2, CD = \sqrt{7}$.

(1) 求 B; (2) 求 △ABC 的面积.

19. (12 分) 某厂研制了一种生产高精产品的设备，为检验新设备生产产品的某项指标有无提高，用一台旧设备和一台新设备各生产了 10 件产品，得到各件产品该项指标数据如下：

旧设备	9.8	10.3	10.0	10.2	9.9	9.8	10.0	10.1	10.2	9.7
新设备	10.1	10.4	10.1	10.0	10.1	10.3	10.6	10.5	10.4	10.5

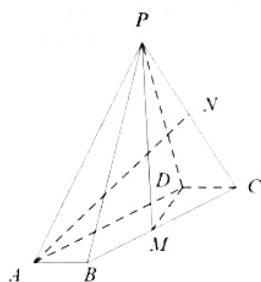
旧设备和新设备生产产品的该项指标的样本平均数分别记为 \bar{x} 和 \bar{y} ，样本方差分别记为 S_1^2 和 S_2^2 。

(1) 求 $\bar{x}, \bar{y}, S_1^2, S_2^2$;

(2) 判断新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备是否有显著提高 (如果 $\bar{y} - \bar{x} \geq 2\sqrt{\frac{S_1^2 + S_2^2}{10}}$ 则认为新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高，否则不认为有显著提高)。

20. (12分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是平行四边形, $\angle ABC = 120^\circ$, $AB = 1$, $BC = 4$, $PA = \sqrt{15}$. M 、 N 分别是 BC 、 PC 的中点, $PD \perp DC$, $PM \perp MD$

- (1) 证明: $AB \perp PM$;
(2) 求直线 AN 与平面 PDM 所成的角正弦值.

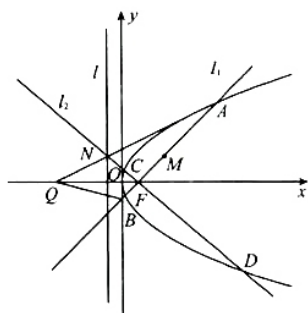


21. (12分) 已知函数 $f(x) = -\frac{4}{3}x^3 + (a+1)x^2 - ax$.

- (1) 若 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上有极值, 求 a 的取值范围;
(2) 求证: 当 $-1 < a < 2$ 时, 过点 $P(0, -1)$ 只有一条直线与 $f(x)$ 的图像相切.

22. (12分) 如图所示, 过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 F 做互相垂直的直线 l_1, l_2 , l_1 交抛物线与 A, B 两点 (A 在 x 轴上方), l_2 交抛物线与 C, D 两点, 交其准线于点 N .

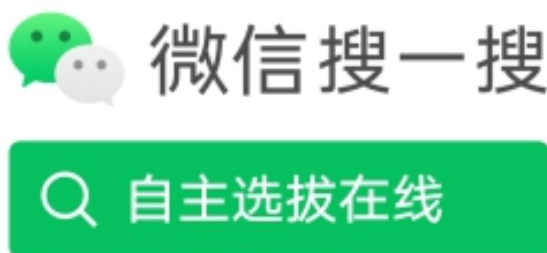
- (1) 设 AB 的中点为 M , 求证: MN 垂直于 y 轴;
(2) 若直线 AN 与 x 轴交于 Q , 求 $\triangle AQB$ 面积的最小值.



关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料:

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》