

2022 学年第二学期杭州市高二年级教学质量检测

数学试题卷

考生须知:

1. 本试卷分试题卷和答题卷两部分. 满分150分, 考试时间120分钟.
2. 请用黑色字迹的钢笔或签字笔在答题卡指定的区域(黑色边框)内作答, 超出答题区域的作答无效!
3. 考试结束, 只需上交答题卡.

选择题部分(共60分)

一、选择题: 本题共8小题, 每小题5分, 共40分. 在每小题给出的四个选项中, 有一项是符合题目要求的.

1. 直线 $3x+2y-1=0$ 的一个方向向量是 ()
A. $(2, -3)$ B. $(2, 3)$ C. $(-3, 2)$ D. $(3, 2)$
2. 若 $\{a, b, c\}$ 是空间的一个基底, 则也可以作为该空间基底的是 ()
A. $b+c, b, -b-c$ B. $a, a+b, a-b$
C. $a+b, a-b, c$ D. $a+b, a+b+c, c$
3. “巴赫十二平均律”是世界上通用的音乐律制, 它与五度相生律、纯律并称三大律制. “十二平均律”将一个纯八度音程分成十二份, 依次得到十三个单音, 从第二个单音起, 每一个单音的频率与它的前一个单音的频率的比都等于 $\sqrt[12]{2}$. 而早在 16 世纪, 明代朱载堉最早用精湛的数学方法近似计算出这个比例, 为这个理论的发展做出了重要贡献. 若第一个单音的频率为 f , 则第四个单音的频率为 ()
A. $5f$ B. $2^{\frac{1}{3}}f$ C. $4f$ D. $2^{\frac{1}{3}}f$
4. “点 (a, b) 在圆 $x^2+y^2=1$ 外”是“直线 $ax+by+2=0$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 相交”的 ()
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
5. 第 19 届亚运会将于 2023 年 9 月 23 日在杭州开幕, 因工作需要, 还需招募少量志愿者. 甲、乙等 4 人报名参加了“莲花”、“泳镜”、“玉琮”三个场馆的各一个项目的志愿者工作, 每个项目仅需 1 名志愿者, 每人至多参加一个项目. 若甲不能参加“莲花”场馆的项目, 则不同的选择方案共有 ()
A. 6 种 B. 12 种 C. 18 种 D. 24 种

6. A, B 两个学科兴趣小组在实验室研究某粒子的运动轨迹, 共同记录到粒子的一组坐标信息 (x_i, y_i) . A 小组根据表中数据, 直接对 (x, y) 作线性回归分析, 得到: 回归方程 $\hat{y} = 0.4699x + 0.235$ 决定系数 $R^2 = 0.8732$. B 小组先将数据按照变换 $u = x^2, v = y^2$ 进行整理, 再对 u, v 作线性回归分析, 得到: 回归方程 $\hat{v} = -0.5006u + 0.4922$, 决定系数 $R^2 = 0.9375$. 根据统计学知识, 下列方程中, 最有可能是该粒子运动轨迹方程的是 ()

- A. $0.4699x - y + 0.235 = 0$ B. $0.5006x + y - 0.4922 = 0$
C. $\frac{0.5006x^2}{0.4922} + \frac{y^2}{0.4922} = 1$ D. $\frac{x^2}{0.4922} + \frac{0.5006y^2}{0.4922} = 1$

7. 设 A, B, C, D 是半径为 1 的球 O 的球面上的四个点. 设 $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$, 则 $|AD| + |BD| + |CD|$ 不可能等于 ()

- A. 3 B. $\frac{7}{2}$ C. 4 D. $3\sqrt{2}$

8. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , P 是椭圆上不与顶点重合的一点, 记 I 是 $\triangle PF_1F_2$ 的内心. 直线 PI 交 x 轴于 A 点, $|\vec{OA}| = \frac{1}{4}c$,

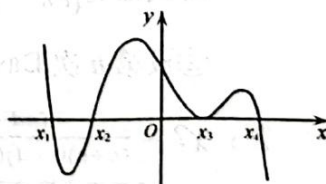
且 $\vec{PF}_1 \cdot \vec{PF}_2 = \frac{1}{16}a^2$, 则椭圆 C 的离心率为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 若函数 $f(x)$ 导函数的部分图象如图所示, 则 ()

- A. x_1 是 $f(x)$ 的一个极大值点
B. x_2 是 $f(x)$ 的一个极小值点
C. x_3 是 $f(x)$ 的一个极大值点
D. x_4 是 $f(x)$ 的一个极小值点



(第 9 题)

10. 抛掷一枚质地均匀的骰子 (六个面上的数字是 1, 2, 3, 4, 5, 6), 抛掷两次. 设事件 A : “两次向上的点数之和大于 7”, 事件 B : “两次向上的点数之积大于 20”, 事件 C : “两次向上的点数之和小于 10”, 则 ()

- A. 事件 B 与事件 C 互斥 B. $P(AB) = \frac{5}{72}$
C. $P(B|A) = \frac{2}{5}$ D. 事件 A 与事件 C 相互独立

11. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{a^2 - a + 4} = 1 (a > 0)$, 直线 l 与双曲线 C 的右支交于点 A, B , 则下列说法中正确的是 ()
- A. 双曲线 C 离心率的最小值为 4
- B. 离心率最小时双曲线 C 的渐近线方程为 $\sqrt{3}x \pm y = 0$
- C. 若直线 l 同时与两条渐近线交于点 C, D , 则 $|AC| = |BD|$
- D. 若 $a = 1$, 点 A 处的切线与两条渐近线交于点 E, F , 则 $S_{\triangle EOF}$ 为定值
12. 已知曲线 $f(x) = \frac{x}{e^x}$, $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, 及直线 $y = a$, 下列说法中正确的是 ()
- A. 曲线 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的切线与曲线 $g(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线平行
- B. 若直线 $y = a$ 与曲线 $f(x)$ 仅有一个公共点, 则 $a = \frac{1}{e}$
- C. 曲线 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有且仅有一个公共点
- D. 若直线 $y = a$ 与曲线 $f(x)$ 交于点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 与曲线 $g(x)$ 交于点 $B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$, 则 $x_1 x_3 = x_2^2$

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

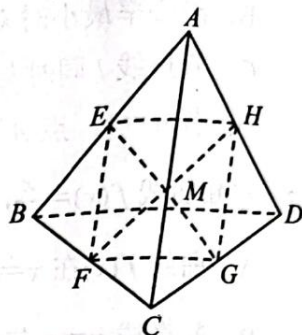
13. $(x-y)(x+y)^8$ 的展开式中 $x^3 y^6$ 的系数为_____.
14. 曲率是衡量曲线弯曲程度的重要指标. 定义: 若 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, $f''(x)$ 是 $f'(x)$ 的导函数, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x, f(x))$ 处的曲率 $K = \frac{|f''(x)|}{[1+(f'(x))^2]^{\frac{3}{2}}}$. 已知 $f(x) = \cos(x-1) - \ln x$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的曲率为_____.
15. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 = 8$, $a_n = [2^{(-1)^n} + n]a_{n-1} (n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*)$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $b_n = \log_2(a_{2n+2} \cdot a_{2n-1}) - \log_2(a_{2n} \cdot a_{2n+1})$, 则满足 $S_n - 5 > 0$ 的正整数 n 的最小值为_____.
16. 设函数 $f(x) = 2^{|x+2|} + \cos(\frac{\pi}{2}x)$, 则使得 $f(x+1) > f(2x)$ 成立的 x 的取值范围是_____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本题满分 10 分)

如图，在四面体 $ABCD$ 中， $\overrightarrow{AE} = \lambda \overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{AH} = \lambda \overrightarrow{AD}$ ， $\overrightarrow{CF} = (1-\lambda)\overrightarrow{CB}$ ， $\overrightarrow{CG} = (1-\lambda)\overrightarrow{CD}$ ， $\lambda \in (0, 1)$ 。

- (1) 求证： E, F, G, H 四点共面。
- (2) 若 $\lambda = \frac{1}{3}$ ，设 M 是 EG 和 FH 的交点， O 是空间任意一点，用 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$ 表示 \overrightarrow{OM} 。



(第 17 题)

18. (本题满分 12 分)

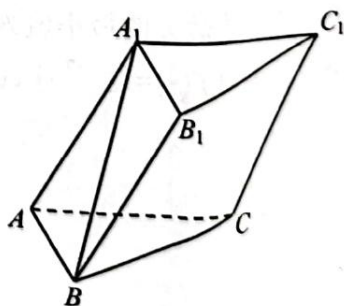
已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_4 = 4S_2$ ， $a_{2n} = 2a_n + 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$)。

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。
- (2) 若 $\{a_n\}$ 中的部分项 a_{b_n} 组成的数列 $\{a_{b_n} + 1\}$ 是以 $a_1 + 1$ 为首项，2 为公比的等比数列，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

19. (本题满分 12 分)

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，所有棱长均为 2， $\angle A_1AC = 60^\circ$ ， $A_1B = \sqrt{6}$ 。

- (1) 证明：平面 $A_1ACC_1 \perp$ 平面 ABC 。
- (2) 求平面 BA_1B_1 与平面 $A_1B_1C_1$ 的夹角的正弦值。



(第 19 题)

20. (本题满分 12 分) 第 19 届亚运会将于 2023 年 9 月 23 日在杭州拉开帷幕, 为了更好地迎接亚运会, 杭州市政府大举加强了城市交通基础设施的建设. 至 2023 年地铁运行的里程数达到 516 公里, 排位全国第六. 同时, 一张总长 464 公里、“四纵五横”为骨架、通达“东西南北中”十城区的快速路网也顺利完工准备接待世界各地的来宾. 现杭州公共出行的主流方式为地铁、公交、打车、共享单车这四种, 基本可以覆盖大众的出行需求.

- (1) 一个兴趣小组发现, 来自不同的城市的游客选择出行的习惯会有很大差异, 为了验证这一猜想该小组进行了研究. 请完成下列 2×2 列联表, 并根据小概率值 $\alpha=0.010$ 的独立性检验, 分析城市规模是否与出行偏好地铁有关? (精确到 0.001)

单位: 人

出行方式	国际大都市	中小型城市	合计
偏好地铁		20	100
偏好其他	60		
合计		60	

- (2) 国际友人 David 来杭游玩, 每日的行程分成 M ($M \in \mathbb{N}^*$) 段, 为了更好的体验文化, 相邻两段的出行方式不能相同, 且选择地铁、公交、打车、共享单车的概率是等可能的. 已知他每日从酒店出行的方式一定是从地铁开始, 记第 n 段行程上 David 坐地铁的概率为 p_n , 易知 $p_1=1$, $p_2=0$.

① 试证明 $\{p_n - \frac{1}{4}\}$ 为等比数列;

② 设第 n 次 David 选择共享单车的概率为 q_n , 比较 p_5 与 q_5 的大小.

附: $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, $n=a+b+c+d$.

α	0.050	0.010	0.001
χ_α	3.841	6.635	10.828

21. (本题满分 12 分)

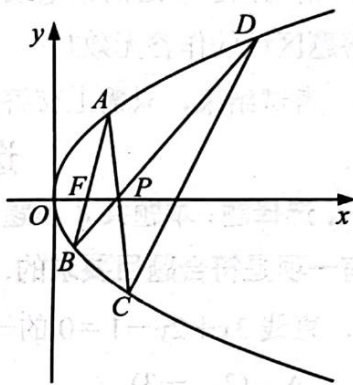
设抛物线 $C: y^2 = 2py$ ($p > 0$), 过焦点 F 的直线与抛物线 C 交于点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. 当直线 AB 垂直于 x 轴时, $|AB| = 2$.

(1) 求抛物线 C 的标准方程.

(2) 已知点 $P(1, 0)$, 直线 AP , BP 分别与抛物线 C 交于点 C , D .

① 求证: 直线 CD 过定点;

② 求 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PCD$ 面积之和的最小值.



(第 21 题)

22. (本题满分 12 分)

设函数 $f(x) = (x-1)^2 e^x - ax$, 若曲线 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y = -2x + b$.

(1) 求实数 a, b 的值.

(2) 证明: 函数 $f(x)$ 有两个零点.

(3) 记 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导数, x_1, x_2 为 $f(x)$ 的两个零点,

证明: $f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > -a$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**浙江官方微信号：**zjgkjzb**。



微信搜一搜

浙考家长帮

