

淮安市 2022~2023 学年度第一次调研测试

数学参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

1. C 2. C 3. A 4. A 5. C 6. D 7. A 8. B

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. AD 10. ABD 11. ABD 12. AC

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. -120 14. 27 15. $15\sqrt{2}$ 16. 5

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

已知 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $a \cos B + b \cos A = 2c \cos C$ 。

(1) 求角 C ；

(2) 若 $c = 2$ ，求 $\triangle ABC$ 的周长的取值范围。

17. (1) 由正弦定理，得 $\sin A \cos B + \sin B \cos A = 2 \sin C \cos C$ ，
即 $\sin(A+B) = 2 \sin C \cos C$ ，即 $\sin C = 2 \sin C \cos C$ ， 2 分
又 $C \in (0, \pi)$ ，所以 $\sin C \neq 0$ ，

所以 $\cos C = \frac{1}{2}$ ，故 $C = \frac{\pi}{3}$ 。 4 分

(2) 由正弦定理，得 $a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{4}{\sqrt{3}} \sin A$ ， $b = \frac{4}{\sqrt{3}} \sin B$ ， 5 分

所以 $\triangle ABC$ 的周长 $L = a + b + c = \frac{4}{\sqrt{3}}(\sin A + \sin B) + 2$
 $= \frac{4}{\sqrt{3}}[\sin A + \sin(\frac{2\pi}{3} - A)] + 2$
 $= 4(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin A + \frac{1}{2} \cos A) + 2$
 $= 4 \sin(A + \frac{\pi}{6}) + 2$ ， 8 分

由 $\triangle ABC$ 为锐角三角形可知， $\begin{cases} 0 < A < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < B = \frac{2\pi}{3} - A < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$ 得 $\frac{\pi}{6} < A < \frac{\pi}{2}$ ，

所以 $\frac{\pi}{3} < A + \frac{\pi}{6} < \frac{2\pi}{3}$ ，所以 $\sin(A + \frac{\pi}{6}) \in (\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$ ，

所以 $\triangle ABC$ 的周长的取值范围为 $(2 + 2\sqrt{3}, 6]$ 。 10 分

18. (12 分)

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $S_3 = 14$ ， $S_6 = 126$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 当 $n \in \mathbb{N}^*$ 时， $a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_1 b_n = 4^n - 1$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式。

18. (1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q .

$$\begin{cases} S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 14 & \text{①} \\ S_6 - S_3 = a_4 + a_5 + a_6 = 112 & \text{②} \end{cases}, \quad \frac{\text{②}}{\text{①}} \text{ 得 } q^3 = 8, \text{ 所以 } q = 2 \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{有 } S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + 2a_1 + 4a_1 = 14, \text{ 得 } a_1 = 2,$$

则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^n$.

(注: 若使用等比求和公式没有讨论公比 $q=1$, 扣 1 分) $\dots\dots\dots 5$ 分

$$(2) \text{ 由 } 2^n b_1 + 2^{n-1} b_2 + \dots + 2b_n = 4^n - 1, \quad n=1 \text{ 时 } 2b_1 = 3, \text{ 得 } b_1 = \frac{3}{2}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } n \geq 2 \text{ 时, } 2^{n-1} b_1 + 2^{n-2} b_2 + \dots + 2b_{n-1} = 4^{n-1} - 1. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$2^n b_1 + 2^{n-1} b_2 + \dots + 2b_n = 2(2^{n-1} b_1 + 2^{n-2} b_2 + \dots + 2b_{n-1}) + 2b_n = 4^n - 1 \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{有 } 2(4^{n-1} - 1) + 2b_n = 4^n - 1, \text{ 得 } n \geq 2 \text{ 时, } b_n = 4^{n-1} + \frac{1}{2} \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

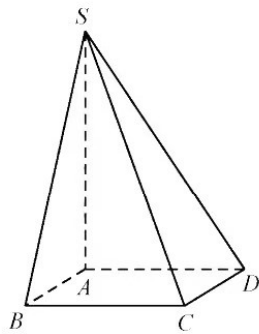
$$\text{又 } b_1 = \frac{3}{2}, \text{ 故 } b_n = 4^{n-1} + \frac{1}{2} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. (12 分)

如图, 在四棱锥 $S-ABCD$ 中, 侧面 $SAD \perp$ 底面 $ABCD$, $SA \perp AD$, 且四边形 $ABCD$ 为平行四边形, $AB=1$, $BC=2$, $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$, $SA=3$.

(1) 求二面角 $S-CD-A$ 的大小;

(2) 点 P 在线段 SD 上且满足 $SP = \lambda SD$, 试确定 λ 的值, 使得直线 BP 与面 PCD 所成角最大.



19. (1) 连接 AC , 在 $\triangle ABC$, $AB=1, BC=2$,

$$\angle ABC = \frac{\pi}{3}, \text{ 由余弦定理得 } AC = \sqrt{3}, \text{ 所以 } \angle BAC = \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

因为侧面 $SAD \perp$ 底面 $ABCD$, 面 $SAD \cap$ 底面 $ABCD = AD$, $SA \perp AD$,

所以 $SA \perp$ 面 $ABCD$, 所以 $SA \perp AC \dots\dots\dots 4$ 分

法 1: 以 A 为原点建立如图所示空间直角坐标系.

则 $B(1, 0, 0), C(0, \sqrt{3}, 0), S(0, 0, 3), D(-1, \sqrt{3}, 0), \overrightarrow{CD} = (-1, 0, 0), \overrightarrow{SC} = (0, \sqrt{3}, -3)$.

设平面 SCD 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

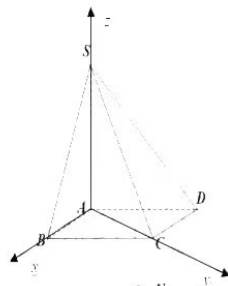
由 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{SC} = 0 \end{cases}$, 得 $\begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{3}y - 3z = 0 \end{cases}$, 可取 $\vec{n} = (0, \sqrt{3}, 1)$.

易知 $\vec{m} = (0, 0, 1)$ 为面 $ABCD$ 的法向量.6 分

所以 $\cos \theta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| |\vec{m}|} = \frac{1}{\sqrt{1+3}} = \frac{1}{2}$.

因为二面角 $S-CD-A$ 为锐角,

所以 $\theta = \frac{\pi}{3}$. 即二面角 $S-CD-A$ 的大小为 $\frac{\pi}{3}$8 分



法 2: 因为 $SA \perp$ 面 $ABCD$, 所以 $SA \perp CD$.

因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形, 所以 $AC \perp CD$,

又 $SA \cap AC = A$, 所以 $CD \perp$ 面 SAC , 所以 $CD \perp SC$.

又面 $ACD \cap$ 面 $SCD = CD$, 所以 $\angle ACS$ 为二面角 $S-CD-A$ 的平面角.6 分

因为 $\tan \angle ACS = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, 二面角 $S-CD-A$ 为锐角, 所以 $\theta = \frac{\pi}{3}$.

即二面角 $S-CD-A$ 的大小为 $\frac{\pi}{3}$8 分

(2) 设 $P(x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{SP} = \lambda \overrightarrow{SD}$, 得 $(x_1, y_1, z_1 - 3) = \lambda(-1, \sqrt{3}, -3)$,

$x_1 = -\lambda, y_1 = \sqrt{3}\lambda, z_1 = 3 - 3\lambda$, 所以 $P(-\lambda, \sqrt{3}\lambda, 3 - 3\lambda)$, 所以 $\overrightarrow{BP} = (-\lambda - 1, \sqrt{3}\lambda, 3 - 3\lambda)$.

由 (1) 知平面 PCD 的法向量为 $\vec{n} = (0, \sqrt{3}, 1)$10 分

因为 $\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{BP} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{BP}| |\vec{n}|} = \frac{3\lambda + 3 - 3\lambda}{2\sqrt{(\lambda+1)^2 + (\sqrt{3}\lambda)^2 + (3-3\lambda)^2}} = \frac{3}{2\sqrt{13\lambda^2 - 16\lambda + 10}}$,

所以当 $\lambda = \frac{8}{13}$ 时, $\cos \alpha$ 值最大, 即当 $\lambda = \frac{8}{13}$ 时, BP 与平面 PCD 所成角最大.

20. (12 分)

设椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$,

若椭圆 E 上的点到直线 $l: x = \frac{a^2}{c}$ 的最小距离为 $3 - \sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 过 F_1 作直线交椭圆 E 于 A, B 两点, 设直线 AF_2, BF_2 与直线 l 分别交于 C, D 两点, 线段 AB, CD 的中点分别为 M, N, O 为坐标原点, 若 M, O, N 三点共线, 求直线 AB 的方程.

20. (1) 由条件知, $\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ \frac{a^2}{c} - a = 3 - \sqrt{3}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = \sqrt{3}, \\ c = 1, \end{cases}$ 所以 $b^2 = a^2 - c^2 = 2$,

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$4 分

(2) 由 (1) 知, $F_1(-1, 0), F_2(1, 0)$,

由题意知, 直线 AB 的斜率不为 0, 设直线 AB 的方程为 $x = my - 1$,

$$\text{联立} \begin{cases} \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1, \\ x = my - 1, \end{cases} \text{ 消去 } x \text{ 并整理得, } (2m^2 + 3)y^2 - 4my - 4 = 0.$$

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 则 } y_1 + y_2 = \frac{4m}{2m^2 + 3}, y_1 y_2 = \frac{-4}{2m^2 + 3}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } y_M = \frac{2m}{2m^2 + 3}, x_M = my_M - 1 = \frac{-3}{2m^2 + 3},$$

$$\text{所以直线 } OM \text{ 的斜率为 } k_{OM} = \frac{y_M}{x_M} = -\frac{2m}{3}.$$

$$\text{直线 } AF_2 \text{ 的方程为 } y = \frac{y_1}{x_1 - 1}(x - 1), \text{ 直线 } l \text{ 的方程为 } x = 3, \text{ 则 } C(3, \frac{2y_1}{x_1 - 1}),$$

$$\text{直线 } BF_2 \text{ 的方程为 } y = \frac{y_2}{x_2 - 1}(x - 1), \text{ 同理有 } D(3, \frac{2y_2}{x_2 - 1}). \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } y_N &= \frac{y_1}{x_1 - 1} + \frac{y_2}{x_2 - 1} = \frac{y_1}{my_1 - 2} + \frac{y_2}{my_2 - 2} \\ &= \frac{y_1(my_2 - 2) + y_2(my_1 - 2)}{(my_1 - 2)(my_2 - 2)} = \frac{2my_1y_2 - 2(y_1 + y_2)}{m^2y_1y_2 - 2m(y_1 + y_2) + 4} \\ &= \frac{2m \cdot \frac{-4}{2m^2 + 3} - 2 \times \frac{4m}{2m^2 + 3}}{m^2 \cdot \frac{-4}{2m^2 + 3} - 2m \cdot \frac{4m}{2m^2 + 3} + 4} = \frac{4m}{m^2 - 3}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\text{所以直线 } ON \text{ 的斜率为 } k_{ON} = \frac{y_N}{x_N} = \frac{4m}{3(m^2 - 3)}.$$

$$\text{由 } M, O, N \text{ 三点共线可得, } k_{OM} = k_{ON}, \text{ 即 } -\frac{2m}{3} = \frac{4m}{3(m^2 - 3)},$$

$$\text{所以 } m = 0 \text{ 或 } m = \pm 1.$$

$$\text{故直线 } AB \text{ 的方程为 } x = -1 \text{ 或 } x - y + 1 = 0 \text{ 或 } x + y + 1 = 0. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. (12 分)

第 22 届世界杯于 2022 年 11 月 21 日到 12 月 18 日在卡塔尔举办。在决赛中，阿根廷队通过点球战胜法国队获得冠军。

(1) 扑点球的难度一般比较大，假设罚点球的球员会等可能地随机选择球门的左、中、右三个方向射门，门将也会等可能地随机选择球门的左、

中、右三个方向来扑点球，而且门将即使方向判断正确也有 $\frac{2}{3}$ 的可能

性扑不到球。不考虑其它因素，在一次点球大战中，求门将在前三次扑到点球的个数 X 的分布列和期望；

(2) 好成绩的取得离不开平时的努力训练，甲、乙、丙三名前锋队员在某次传接球的训练中，球从甲脚下开始，等可能地随机传向另外 2 人中的 1 人，接球者接到球后再等可能地随机传向另外 2 人中的 1 人，如此不停地传下去，假设传出的球都能接住，记第 n 次传球之前球在甲脚下的概率为 p_n ，易知 $p_1 = 1, p_2 = 0$ 。

①试证明： $\{p_n - \frac{1}{3}\}$ 为等比数列；

②设第 n 次传球之前球在乙脚下的概率为 q_n ，比较 p_{10} 与 q_{10} 的大小。

21. (1) 依题意可得，门将每次可以扑到点球的概率为 $p = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ ， $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$



门将前三次扑到点球的个数 X 可能的取值为 0, 1, 2, 3, 易知 $X \sim B(3, \frac{1}{9})$,

所以 $P(X=k) = C_3^k \times (\frac{1}{9})^k \times (\frac{8}{9})^{3-k}$, $k=0,1,2,3$, 2 分

故 X 的分布列为:

X	0	1	2	3
P	$\frac{512}{729}$	$\frac{64}{243}$	$\frac{8}{243}$	$\frac{1}{729}$

所以 X 的期望 $E(X) = 3 \times \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$ 6 分

(2) ①第 n 次传球之前球在甲脚下的概率为 p_n ,

则当 $n \geq 2$ 时, 第 $n-1$ 次传球之前球在甲脚下的概率为 p_{n-1} ,

第 $n-1$ 次传球之前球不在甲脚下的概率为 $1-p_{n-1}$,

则 $p_n = p_{n-1} \times 0 + (1-p_{n-1}) \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{2}$, 8 分

即 $p_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}(p_{n-1} - \frac{1}{3})$, 又 $p_1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$,

所以 $\{p_n - \frac{1}{3}\}$ 是以 $\frac{2}{3}$ 为首项, 公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列. 10 分

②由①可知 $p_n = \frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^{n-1} + \frac{1}{3}$, 所以 $p_{10} = \frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^9 + \frac{1}{3} < \frac{1}{3}$,

所以 $q_{10} = \frac{1}{2}(1-p_{10}) = \frac{1}{2}[\frac{2}{3} - \frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^9] > \frac{1}{3}$,

故 $p_{10} < q_{10}$ 12 分

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = ae^x + \cos x + \frac{1}{2}x^2$, 其中 a 为实数, e 是自然对数的底数.

(1) 当 $a=0$ 时, 求曲线 $f(x)$ 在点 $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$ 处的切线方程;

(2) 若 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, $g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上有两个极值点, 求 a 的取值范围.

22. (1) 当 $a=0$ 时, $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}x^2$, 则 $f'(x) = -\sin x + x$,

所以 $f'(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - 1$, 1 分

又 $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{8}$,

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$ 处的切线方程为 $y = (\frac{\pi}{2} - 1)x - \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2}$ 3 分

(2) $g(x) = ae^x - \sin x + x$, $\therefore g'(x) = ae^x - \cos x + 1$,

$g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上有两个极值点, 即 $g'(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上有两个变号零点,

令 $g'(x) = 0$ 得 $ae^x - \cos x + 1 = 0$, $\therefore a - \frac{\cos x - 1}{e^x} = 0$,5 分

$$\therefore h(x) = a - \frac{\cos x - 1}{e^x}, \quad \therefore h'(x) = \frac{\sin x + \cos x - 1}{e^x} = \frac{\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) - 1}{e^x},$$

当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $\sin(x + \frac{\pi}{4}) \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$, $\therefore h'(x) > 0 \therefore h(x)$ 单调增,

当 $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 时, $\sin(x + \frac{\pi}{4}) \in (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \therefore h'(x) < 0 \therefore h(x)$ 单调减,7 分

$$\therefore h(0) = a, h(\frac{\pi}{2}) = a + e^{-\frac{\pi}{2}}, \quad h(\pi) = a + 2e^{-\pi},$$

当 $-e^{-\frac{\pi}{2}} < a < -2e^{-\pi}$ 时, $h(0) < 0, h(\frac{\pi}{2}) > 0, h(\pi) < 0$,

$\therefore \exists x_1 \in (0, \frac{\pi}{2}), x_2 \in (0, \pi)$ 使 $h(x_1) = h(x_2) = 0$,9 分

当 $x \in (0, x_1)$ 时, $h(x) < 0, g'(x) < 0, g(x)$ 单调减,

当 $x \in (x_1, x_2)$ 时, $h(x) > 0, g'(x) > 0, g(x)$ 单调增,

当 $x \in (x_2, \pi)$ 时, $h(x) < 0, g'(x) < 0, g(x)$ 单调减,

即 $-e^{-\frac{\pi}{2}} < a < -2e^{-\pi}$ 时, $g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上有两个极值点.

.....12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线