23 高三三模理科数学参考答案

一、选择题：（本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

1. C　2. D　3. A　4. B　5. C　6. D

7. B　8. B　9. A　10. B　11. D　12. C

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 3　14. 7　15. $\sqrt{3}$　16. $\sqrt{6}$

三、解答题：（共 70 分）

17.解：（1）$(0.006+0.010+2a+0.024+0.036)\times 10=1$ ……1 分

解得 $a=0.012$ ……2 分

样本数据在 $[0,10)$，$[10,20)$，$[20,30)$，$[30,40)$，$[40,50)$，$[50,60)$ 的概率分别为

$0.06,0.10,0.12,0.36,0.24,0.12$.

则平均值为 $0.06\times 5+0.10\times 15+0.12\times 25+0.36\times 35+0.24\times 45+0.12\times 55=34.8$ …6 分

（2）20 分钟到 60 分钟中各组的频率比为 $0.12:0.36:0.24:0.12=1:3:2:1$.

所以 $[20,30)$ 应抽 $\frac{1}{7}\times 7=1$ 人，$[30,40)$ 抽取 $\frac{3}{7}\times 7=3$ 人，$[40,50)$ 抽取 $\frac{2}{7}\times 7=2$ 人，$[50,60)$ 抽取 $\frac{1}{7}\times 7=1$ 人．

$\therefore X$ 的所有可能取值为 $0,1,2,3$ ……8 分

$P(X=0)=\frac{C_4^3}{C_7^3}=\frac{4}{35}$，　$P(X=1)=\frac{C_4^2C_3^1}{C_7^3}=\frac{18}{35}$，

$P(X=2)=\frac{C_4^1C_3^2}{C_7^3}=\frac{12}{35}$，　$P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_7^3}=\frac{1}{35}$.

$\therefore X$ 分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

……10 分

$\therefore E(X)=0\times\frac{4}{35}+1\times\frac{18}{35}+2\times\frac{12}{35}+3\times\frac{1}{35}=\frac{9}{7}$. ……12 分

18.解：（1）$\begin{cases}2S_n=\lambda a_{n+1}+1 & ① \\ 2S_{n-1}=\lambda a_n+1(n\geq 2) & ②\end{cases}$

①—②得 $2a_n=\lambda a_{n+1}-\lambda a_n \Rightarrow \lambda a_{n+1}=(\lambda+2)a_n \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(\lambda+2)}{\lambda}(n\geq 2)$ …………2 分

由 $a_1=\lambda-2$ ，$2S_n=\lambda a_{n+1}+1(\lambda\neq 0\text{且}\lambda\neq -2)$ ，令 $n=1$ ，$a_2=\frac{2\lambda-5}{\lambda}$ ，

$\frac{a_2}{a_1}=\frac{(\lambda+2)}{\lambda}$ ……………………………………………………………………………………4 分

$\{a_n\}$ 为等比数列，则 $\frac{2\lambda-5}{\lambda(\lambda-2)}=\frac{2+\lambda}{\lambda}\Rightarrow(\lambda-1)^2=0\Rightarrow\lambda=1$ ……………………………5 分

则此时数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q=3$，$a_1=-1$，$a_n=-3^{n-1}$ ………………………………………6 分

（2）$b_n=-(n+1)a_n=(n+1)\cdot 3^{n-1}$ ……………………………………………………………7 分

$T_n=2+3\times 3+4\times 3^2+\cdots+(n+1)\times 3^{n-1}\cdots$ ①

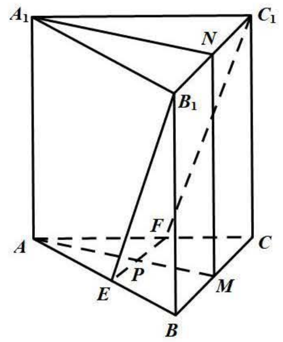
$3T_n=2\times 3+3\times 3^2+4\times 3^3+\cdots+(n+1)\times 3^n\cdots$ ②

②—①得 $-2T_n=2+3+3^2+3^3+\cdots+3^{n-1}-(n+1)\times 3^n=2+\frac{(3^{n-1}-1)\times 3}{3-1}-(n+1)\times 3^n$

$=2+\frac{(3^{n-1}-1)\times 3}{3-1}-(n+1)\times 3^n=\frac{1}{2}-\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot 3^n$ ………………………………………11 分

整理得 $T_n=\frac{(2n+1)\cdot 3^n-1}{4}$ ………………………………………………………………………12 分

19.



（1）证明：$\because ABC-A_1B_1C_1$ 为正三棱柱，$\therefore AA_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$

又 $B_1C_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，$\therefore AA_1\perp B_1C_1$.……………………………………………………2 分

又 N 为正三角形 $A_1B_1C_1$ 边 B_1C_1 的中点，$\therefore A_1N\perp B_1C_1$

$AA_1\cap A_1N=A_1$，$\therefore B_1C_1\perp$ 平面 A_1NMA.……………………………………………3 分

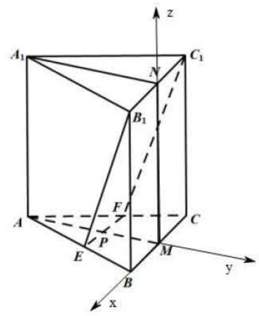
$B_1C_1\subset$ 平面 B_1C_1FE.

$\therefore$ 平面 $A_1NMA\perp$ 平面 B_1C_1FE.………………………………………………………4 分

（2）解：以 M 为原点，MB 所在直线为 x 轴，AM 所在直线为 y 轴，MN 所在直线为 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系.……………………………………………………5 分

$B_1(1,0,2)$，由（1）知 $BC\perp$ 平面 $AMNA_1$，

平面 $AMNA_1$ 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{MB}=(1,0,0)$.…………………………………………6 分



设 $\dfrac{AP}{AM}=\lambda$，则 $AP=\sqrt{3}\lambda$，$\therefore PM=\sqrt{3}(1-\lambda)$

$\because EF//BC$，$\therefore\dfrac{EP}{BM}=\dfrac{AP}{AM}=\lambda$，$\therefore EP=\lambda$，$\therefore E\left(\lambda,\sqrt{3}(\lambda-1),0\right)$

$\therefore\overrightarrow{ME}=\left(\lambda,\sqrt{3}(\lambda-1),0\right),\overrightarrow{MB_1}=(1,0,2)$.…………………………8 分

设平面 B_1EM 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x,y,z)$

$$\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\perp\overrightarrow{ME}\\ \overrightarrow{n_2}\perp\overrightarrow{MB_1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{ME}=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{MB_1}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda x+\sqrt{3}(\lambda-1)y=0\\ x+2z=0\end{cases}$$

令 $z=-1$，则 $x=2,y=\dfrac{2\lambda}{\sqrt{3}(1-\lambda)}$，$\therefore\overrightarrow{n_2}=\left(2,\dfrac{2\lambda}{\sqrt{3}(1-\lambda)},-1\right)$.

$\therefore \cos\frac{\pi}{6}=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{2}{\sqrt{2^2+\left(\frac{2\lambda}{\sqrt{3}(1-\lambda)}\right)^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{5+\frac{4\lambda^2}{3(1-\lambda)^2}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ …………10 分

解得 $\lambda=\frac{1}{3}$. ……………………………………………………………………………11 分

点 P 位于线段 AM 上靠近点 A 的 $\frac{1}{3}$ 处.…………………………………………………12 分

20．解：(1)设椭圆 C 的方程为 $mx^2+ny^2=1\ (m>0,n>0,且m\neq n)$，

因为椭圆 C 过点 $A\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$ 与点 $B(2,0)$，

则有 $\begin{cases}\frac{m}{4}+\frac{15n}{16}=1\\4m=1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}m=\frac{1}{4}\\n=1\end{cases}$. ……………………………………………………3 分

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………………………………………………4 分

(2)设直线 $l:x=ty+1$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}x=ty+1\\\frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，得 $(ty+1)^2+4y^2-4=0$，

即 $(t^2+4)y^2+2ty-3=0$，则 $y_1+y_2=-\frac{2t}{t^2+4}$，$y_1y_2=-\frac{3}{t^2+4}$，……………………6 分

直线 BP，BQ 的方程分别为 $y=\frac{y_1}{x_1-2}(x-2)$，$y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，

令 $x=3$，则 $E(3,\frac{y_1}{x_1-2})$，$F(3,\frac{y_2}{x_2-2})$，………………………………………………7 分

则 $\overrightarrow{PE}=(3-x_1,\frac{y_1(3-x_1)}{x_1-2})=(2-ty_1,\frac{y_1(2-ty_1)}{ty_1-1})$,

$\overrightarrow{QF}=(3-x_2,\frac{y_2(3-x_2)}{x_2-2})=(2-ty_2,\frac{y_2(2-ty_2)}{ty_2-1})$,

所以 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{QF}=(2-ty_1)(2-ty_2)+\frac{y_1y_2(2-ty_1)(2-ty_2)}{(ty_1-1)(ty_2-1)}$

$=\left[t^2y_1y_2-2t\left(y_1+y_2\right)+4\right]\left[1+\dfrac{y_1y_2}{t^2y_1y_2-t\left(y_1+y_2\right)+1}\right]$

$=\left(\dfrac{-3t^2}{t^2+4}+\dfrac{4t^2}{t^2+4}+4\right)\left(1+\dfrac{\dfrac{-3}{t^2+4}}{\dfrac{-3t^2}{t^2+4}+\dfrac{2t^2}{t^2+4}+1}\right)=\dfrac{5t^2+16}{4(t^2+4)}=\dfrac{5(t^2+4)-4}{4(t^2+4)}=\dfrac{5}{4}-\dfrac{1}{t^2+4}$． …10 分

因为$t^2+4\ge 4$，所以$0<\dfrac{1}{t^2+4}\le\dfrac{1}{4}$，$1\le\dfrac{5}{4}-\dfrac{1}{t^2+4}<\dfrac{5}{4}$，

即$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{QF}$的取值范围为$\left[1,\dfrac{5}{4}\right)$，

所以$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{QF}$存在最小值，且最小值为 1．……12 分

21.解：(1) 当$a=\dfrac{1}{2}$时，$f(x)=\ln x+\dfrac{1}{2}\left(x^2-3x+2\right)$，$\therefore f(2)=\ln 2$，

则切点坐标为$(2,\ln 2)$． ……2 分

$f'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}(2x-3)$，则切线斜率$k=f'(2)=1$． ……3 分

切线方程为$y-\ln 2=x-2$，整理得$x-y+\ln 2-2=0$． …… 4 分

(2) $f'(x)=\dfrac{1}{x}+a(2x-3)=\dfrac{2ax^2-3ax+1}{x}(x>1)$，

记$g(x)=2ax^2-3ax+1$，$\Delta=9a^2-8a$． ……5 分

①当$a=0$时，$f'(x)=\dfrac{1}{x}>0$，$f(x)$在$(1,+\infty)$上为增函数，$f(x)>f(1)=0$成立；

②当$0<a\le\dfrac{8}{9}$时，$\Delta=9a^2-8a\le 0$，则$g(x)\ge 0$，即$f'(x)\ge 0$，

$\therefore f(x)$在$(1,+\infty)$上为增函数，$f(x)>f(1)=0$成立； ……7 分

③当$a<0$时，函数$g(x)$在$(1,+\infty)$上为减函数，$g(1)=1-a>0$，$g(x)=0$在$(1,+\infty)$上有且仅有一根x_0，且当$1<x<x_0$时，$g(x)>0$，则$f'(x)>0$，$f(x)$为增函数，

此时$f(x)>f(1)=0$；

当$x>x_0$时，$g(x)<0$，则$f'(x)<0$，$f(x)$为减函数，

构造函数$h(x)=\ln x-x+1(x>1)$，

$h'(x)=\frac{1}{x}-1<0$，$h(x)$为$(1,+\infty)$上的减函数，$h(x)<h(1)=0$，则$\ln x\le x-1$.

$f(x)=\ln x+a(x^2-3x+2)\le x-1+a(x^2-3x+2)=(x-1)[1+a(x-2)]$.

则$f\left(2-\frac{1}{a}\right)<0$.

即存在$x=2-\frac{1}{a}\in(1,+\infty)$使得$f(x)<0$，此种情况不成立；

当$a>\frac{8}{9}$时，函数$g(x)$在$(1,+\infty)$上为增函数，$g(1)=1-a$. ……………………………………9 分

④当$1-a\ge 0$，即$\frac{8}{9}<a\le 1$时，$g(x)\ge 0$，即$f'(x)\ge 0$，

$\therefore f(x)$在$(1,+\infty)$上为增函数，$f(x)>f(1)=0$恒成立；……………………………………10 分

⑤当$1-a<0$，即$a>1$时，$g(1)=1-a<0$，$g(x)=0$在$(1,+\infty)$上有且仅有一根x_1，且当

$1<x<x_1$时，$g(x)<0$，则$f'(x)<0$，$f(x)$为减函数，$f(x)<f(1)=0$，不成立；

综上讨论，实数a的取值范围为$[0,1]$. ……………………………………………………12 分

22. 解：（1）由题意得直线l的普通方程为$\sqrt{3}x-y+2=0$，……………………………………2 分

由$\begin{cases}x=\rho\sin\theta,\\ y=\rho\cos\theta'\end{cases}$ ……………………………………………………………………3 分

得曲线C的直角坐标方程为$x^2+y^2-2y=0$，

即$x^2+(y-1)^2=1$. ………………………………………………………………………5 分

(2) 直线l的参数方程可化为:$\begin{cases}x=\sqrt{3}+\frac{1}{2}t\\ y=5+\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$($t$为参数)，……………………………………6 分

将其代入曲线C的直角坐标方程为$x^2+y^2-2y=0$，可得$t^2+5\sqrt{3}t+18=0$，……8 分

设A，B的对应的参数分别为t_1，t_2，

则$t_1+t_2=-5\sqrt{3}$，$t_1\cdot t_2=18$，所以$t_1,t_2<0$，

所以$\frac{1}{|MA|}+\frac{1}{|MB|}=\frac{1}{|t_1|}+\frac{1}{|t_2|}=\frac{|t_1+t_2|}{|t_1|\cdot|t_2|}=\frac{5\sqrt{3}}{18}$. ……………………………………10 分

23．解：(1)当$a=-1$时，所求不等式可化为$|x-1|+|x-3|<4$，……………………1 分

当$x\le 1$时，所求不等式可化为$(1-x)+(3-x)<4$，解得$x>0$，即$0<x\le 1$，

…………2 分

当 $1<x<3$ 时，所求不等式可化为 $(x-1)+(3-x)<4$，恒成立，即 $1<x<3$，

…………3 分

当 $x\geq 3$ 时，所求不等式可化为 $(x-1)+(x-3)<4$，解得 $x<4$，即 $3\leq x<4$.

…………4 分

综上，所求不等式的解集为 $(0,\ 4)$. ……………………………………………………5 分

(2)因为 $f(x)=|x+a|+|x+3a|\geq|2a|$，所以 $|2a|=2$，即 $|a|=1$，

$(a-m)(a+m)=\frac{4}{n^2}=a^2-m^2$，所以 $m^2+\frac{4}{n^2}=1$，……………………………………7 分

所以 $\frac{1}{m^2}+n^2=\left(m^2+\frac{4}{n^2}\right)\left(\frac{1}{m^2}+n^2\right)=5+m^2n^2+\frac{4}{m^2n^2}$

$\geq 5+2\sqrt{m^2n^2\cdot\frac{4}{m^2n^2}}=9$(当且仅当 $m^2n^2=\frac{4}{m^2n^2}$ 即 $m^2=\frac{1}{3}$，$n^2=6$ 时等号成立)，……9 分

所以 $\frac{1}{m^2}+n^2$ 的最小值为 9. ……………………………………………………10 分