昆明市2023届“三诊一模”高考模拟考试

数学参考答案及评分标准

一、 二、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	B	B	A	D	D	B	C	AD	ABD	BCD	ACD

三、填空题

13.10　　14. 2（写出[1,3]中的任意一个实数即可）　　15.19　　16.145

四、解答题

17.

（1）证明：取 AE 中点为 O，连接 PO，BO，BE，

由图1，$DA=DE=AB=BE$，又 $PA=DA,PE=DE$，所以 $PA=PE$，

所以 $PO\perp AE$，$BO\perp AE$，

又 $PO\cap BO=O$，所以 $AE\perp$ 平面 POB，

又因为 $PB\subset$ 平面 POB，所以 $PB\perp AE$. ……………………………5分

（2）因为二面角 $P-AE-B$ 等于 $90°$，所以平面 $PAE\perp$ 平面 $ABCE$，

平面 $PAE\cap$ 平面 $ABCE=AE$，因为 $PO\perp AE$，所以 $PO\perp$ 平面 $ABCE$，

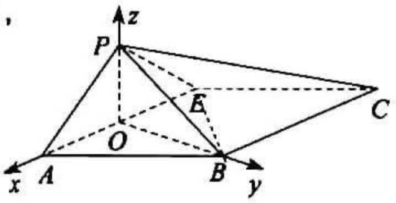
所以 OA，OB，OP 两两垂直.

以 O 为原点，OA，OB，OP 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系如图，

不妨设 $AB=2$，由已知得 $\angle APE=120°$，所以 $OP=OB=1$，$OA=OE=\sqrt{3}$，

则 $P(0,0,1)$，$A(\sqrt{3},0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(-2\sqrt{3},1,0)$，$E(-\sqrt{3},0,0)$，

$\overrightarrow{PA}=(\sqrt{3},0,-1)$，$\overrightarrow{EP}=(\sqrt{3},0,1)$，$\overrightarrow{EC}=(-\sqrt{3},1,0)$，



设平面 PEC 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\sqrt{3}x+z=0\\-\sqrt{3}x+y=0\end{cases}$，

取平面 PEC 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},-\sqrt{3})$，

设 PA 与平面 PEC 所成角为 θ，则 $\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{PA},\boldsymbol{n}\rangle\right|=\left|\dfrac{2\sqrt{3}}{2\times\sqrt{7}}\right|=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，

即 PA 与平面 PEC 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. ……………………………………10分

18. 解：

（1）由于 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{4}bc=\dfrac{\sqrt{3}}{12}b^2$，所以 $b=\sqrt{3}c$，

由正弦定理可得 $\dfrac{\sin B}{\sin C}=\dfrac{b}{c}=\sqrt{3}$. ……………………6分

(2) 由于 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{12}b^2$，所以 $b^2=2\sqrt{3}ac\sin B$；

由余弦定理可得 $a^2+c^2=2ac\cos B+b^2$，

所以 $\frac{c^2+a^2}{ac}=\frac{(2\sqrt{3}\sin B+2\cos B)ac}{ac}=2\sqrt{3}\sin B+2\cos B=4\sin(B+\frac{\pi}{6})$，

则当 $B=\frac{\pi}{3}$ 时，$\frac{c^2+a^2}{ac}$ 取得最大值 4. ……………………12 分

19. 解：

(1) 设事件 A 为“抽取的 3 人中恰有 1 人来自高三年级”，

则有 $P(A)=\frac{C_{13}^2C_2^1}{C_{15}^3}=\frac{12}{35}$. ……………………………5 分

(2) 设甲同学在一轮测试中 3 个动作“优秀”的个数为 Y，则有 $Y\sim B(3,\frac{1}{2})$；

设乙同学在一轮测试中 3 个动作“优秀”的个数为 Z，则有 $Z\sim B(3,\frac{2}{3})$；

所以甲同学在一轮测试结果为优秀的概率

$P(Y\ge 2)=P(Y=2)+P(Y=3)=C_3^2(\frac{1}{2})^2\times(\frac{1}{2})^1+C_3^3(\frac{1}{2})^3\times(\frac{1}{2})^0=\frac{1}{2}$，

乙同学在一轮测试结果为优秀的概率

$P(Z\ge 2)=P(Z=2)+P(Z=3)=C_3^2(\frac{2}{3})^2\times(\frac{1}{3})^1+C_3^3(\frac{2}{3})^3\times(\frac{1}{3})^0=\frac{20}{27}$. ……………8 分

由题意，得 X 可取 0，1，2；

则有 $P(X=0)=(1-\frac{1}{2})\times(1-\frac{20}{27})=\frac{7}{54}$；$P(X=1)=\frac{1}{2}\times(1-\frac{20}{27})+(1-\frac{1}{2})\times\frac{20}{27}=\frac{1}{2}$；

$P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{20}{27}=\frac{10}{27}$.

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{7}{54}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{10}{27}$

……………………………………10 分

因此 X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{7}{54}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{10}{27}=\frac{67}{54}$. ……………………12 分

20. 解：(1)

	P_1	P_2	P_3	P_4	…	P_n
边数	3	12	48	192	…	$3\times4^{n-1}$
从 P_2 起，每一个比前一个图形多出的三角形的个数		3	12	48	…	$3\times4^{n-2}$
从 P_2 起，每一个比前一个图形多出的每一个三角形的面积		$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9^2}$	$\frac{1}{9^3}$	…	$(\frac{1}{9})^{n-1}$

建

所以$a_n=a_{n-1}+\frac{3}{4}\times(\frac{4}{9})^{n-1}$ （$n\in\mathbf{N}^*$，$n\geq 2$）． ……………………5 分

（2）当$n\geq 2$时，

$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+(a_{n-2}-a_{n-3})+\cdots+(a_3-a_2)+(a_2-a_1)+a_1$

$=\frac{3}{4}[(\frac{4}{9})^{n-1}+(\frac{4}{9})^{n-2}+\cdots+\frac{4}{9}]+1$

$=\frac{3}{4}\times[\frac{\frac{4}{9}-(\frac{4}{9})^n}{1-\frac{4}{9}}]+1$

$=\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\times(\frac{4}{9})^{n-1}$，

又因为$a_1=1$，所以$a_n=\frac{8}{5}-\frac{3}{5}(\frac{4}{9})^{n-1}$（$n\in\mathbf{N}^*$）． ……………………10 分

（3）由$a_n>\frac{797}{500}$，得$\frac{8}{5}-\frac{3}{5}(\frac{4}{9})^{n-1}>\frac{797}{500}$，则$(\frac{4}{9})^{n-1}<\frac{1}{100}$，所以$(n-1)\lg\frac{4}{9}<-2$，

故$n>\frac{1}{\lg 3-\lg 2}+1$，

由$\lg 3\approx 0.477$，$\lg 2\approx 0.301$，故$n>6.682$，又因为$n\in\mathbf{N}^*$，所以$n\geq 7$，

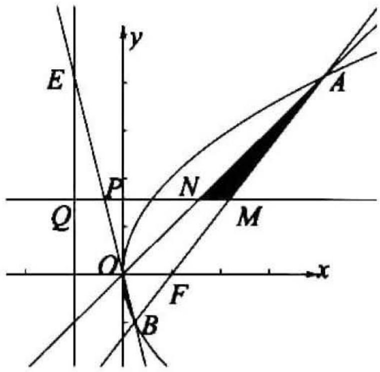
所以从第 7 个图形开始雪花曲线所围成的面积大于$\frac{797}{500}$． …………12 分

21．解：（1）设$T(x,y)$，由题意可得$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=x+1$，

化简得$y^2=4x$，故所求动点T的轨迹方程$C:y^2=4x$． ……………………5 分

（2）设直线$AB:x=my+1$，$A(\frac{y_1^2}{4},y_1)$，$B(\frac{y_2^2}{4},y_2)$，

由$\begin{cases}x=my+1,\\y^2=4x,\end{cases}$得$y^2-4my-4=0$，$\Delta=16m^2+16>0$，



则$y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$．

线段AB的中点为M，

则$M(\frac{y_1^2+y_2^2}{8},\frac{y_1+y_2}{2})$，$Q(-1,\frac{y_1+y_2}{2})$，

又直线$OA:y=\frac{4}{y_1}x$，令$y=\frac{y_1+y_2}{2}$，

则$x=\frac{y_1^2+y_1y_2}{8}=\frac{y_1^2-4}{8}$，故$N(\frac{y_1^2-4}{8},\frac{y_1+y_2}{2})$，

同理$P(\frac{y_2^2-4}{8},\frac{y_1+y_2}{2})$，

则$|MN|=\left|\frac{y_1^2+y_2^2}{8}-\frac{y_1^2-4}{8}\right|=\frac{y_2^2+4}{8}$，

$|PQ|=\left|\dfrac{y_2^{\,2}-4}{8}-(-1)\right|=\dfrac{y_2^{\,2}+4}{8}$，所以$|MN|=|PQ|$.　　　　……………………9分

又直线$OB:y=\dfrac{4}{y_2}x$，令$x=-1$，则$y=\dfrac{-4}{y_2}=\dfrac{y_1y_2}{y_2}=y_1$，即$E(-1,y_1)$，

故$S_1=S_2$.　　　　……………………12分

22．解：（1）$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

$f'(x)=\ln x+\dfrac{x-e}{x}=\ln x-\dfrac{e}{x}+1$，所以$f'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

当$x=1$，$f'(1)=1-e$，又$f(1)=0$，所以直线$y=(1-e)x+b$与曲线$y=f(x)$的切点为$(1,0)$，代入直线方程得$b=e-1$.　　　　……………………5分

（2）由（1）可知，$f(x)$在$(1,0)$处的切线为$p(x)=(1-e)(x-1)$，

设$g(x)=f(x)-p(x)=(x-e)\ln x-(1-e)(x-1)$，

$g'(x)=\ln x-\dfrac{e}{x}+e$，$g'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，$g'(1)=0$，

当$0<x<1$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，当$x>1$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，

所以$g(x)_{\min}=g(1)=0$，则$f(x)\ge p(x)$，所以$f(x_1)\ge p(x_1)$，

设$p(x_1')=m$，则$x_1'=1+\dfrac{m}{1-e}$，

因为$p(x_1')=m=f(x_1)\ge p(x_1)$，$p(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，所以$x_1\ge x_1'=1+\dfrac{m}{1-e}$；

又因为$f'(e)=1$，所以$f(x)$在$(e,0)$处的切线为$q(x)=x-e$，

设$h(x)=f(x)-q(x)=(x-e)\ln x-x+e$，

$h'(x)=\ln x-\dfrac{e}{x}$，$h'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，$h'(e)=0$，

当$0<x<e$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减，当$x>e$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增，

所以$h(x)_{\min}=h(e)=0$，则$f(x)\ge q(x)$，所以$f(x_2)\ge p(x_2)$，

设$q(x_2')=m$，则$x_2'=m+e$，

因为$q(x_2')=m=f(x_2)\ge q(x_2)$，$q(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，所以$x_2\le x_2'=m+e$，

故$x_2-x_1\le m+e-(1+\dfrac{m}{1-e})=\dfrac{em}{e-1}+e-1$，当且仅当$m=0$时等号成立.…………12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。