2023年天津市十二区重点学校高三毕业班联考（一）

数学试卷

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分.共150分.考试时间120分钟.

第Ⅰ卷　选择题（共50分）

注意事项：

1.答第Ⅰ卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目填涂在答题卡规定位置上.

2.第Ⅰ卷每小题选出答案后，用2B铅笔在答题卡上对应的答案标号涂黑.

参考公式：• 如果事件 A 、 B 互斥，那么 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

• 柱体的体积公式 $V=Sh$. 其中 S 表示柱体的底面积，h 表示柱体的高.

一、选择题（在每小题四个选项中，只有一项是符合题目要求的，本大题共9小题，每小题5分，满分45分）

1.设全集 $U=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$，集合 $A=\{-3,-2,2,3\}$，$B=\{-3,0,1,2\}$，则 $(\complement_U A)\cap B=$（　　）

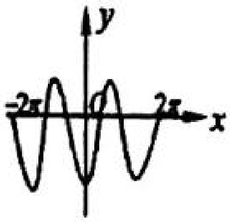
A.$\varnothing$　　B.$\{1\}$　　C.$\{0,1\}$　　D.$\{0,1,2\}$

2.设 $x\in\mathbf{R}$，则"$\log_2 x<1$"是"$x^2+x-6<0$"的（　　）

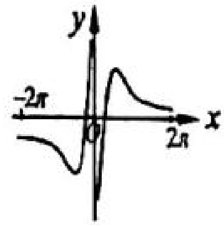
A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

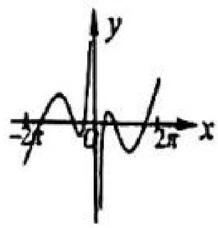
3.函数 $f(x)=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\cos x$ 在其定义域上的图像大致是（　　）



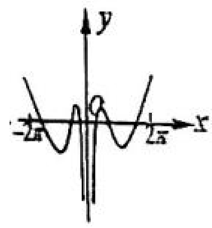
A.



B.

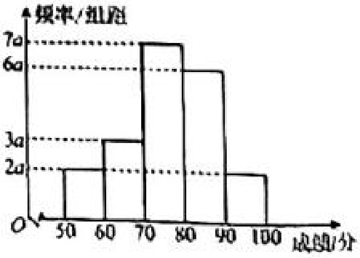


C.



D.

4.某校1000名学生参加环保知识竞赛，随机抽取了20名学生的考试成绩（单位：分），成绩的频率分布直方图如图所示，则下列说法正确的是（　　）



A.频率分布直方图中a的值为 0.004

B.估计这 20 名学生考试成绩的第 60 百分位数为 75

C.估计这 20 名学生数学考试成绩的众数为 80

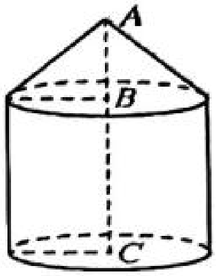
D.估计总体中成绩落在$\left[60,70\right)$内的学生人数为 150

5.已知$f\left(x\right)$是偶函数，且当$x>0$时，$f\left(x\right)$单调递减，设$a=-2^{12}$，$b=\left(\frac{1}{2}\right)^{-0.8}$，$c=2\log_5 2$，则$f\left(a\right)$，$f\left(b\right)$，$f\left(c\right)$大小关系为（　　）

A. $f\left(c\right)<f\left(b\right)<f\left(a\right)$　　　　B. $f\left(c\right)>f\left(b\right)>f\left(a\right)$

C. $f\left(c\right)<f\left(a\right)<f\left(b\right)$　　　　D. $f\left(c\right)>f\left(a\right)>f\left(b\right)$

6.如图，几何体Ω为一个圆柱和圆锥的组合体，圆锥的底面和圆柱的一个底面重合，圆锥的顶点为A，圆柱的上、下底面的圆心分别为B、C，若该几何体Ω存在外接球（即圆锥的顶点与底面圆周在球面上，且圆柱的底面圆周也在球面上）.已知$BC=2AB=4$，则该组合体的体积等于（　　）



A. 56π　　　　B. $\frac{70}{3}\pi$　　　　C. 48π　　　　D. 64π

7.由伦敦著名建筑事务所 Steyn Studio 设计的南非双曲线大教堂惊讶世界，该建筑是数学与建筑完美结合造就的艺术品.若将如图所示的大教堂外形弧线的一段近似看成双曲线$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{4}=1$（$a>0$）下支的一部分，以原点为圆心，双曲线虚半轴长为半径长的圆与双曲线的两条渐近线分别相交于A、B、C、D四点，四边形$ABCD$的面积为$2a$，则双曲线的方程为（　　）

A. $\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{4}=1$　　B. $\dfrac{y^2}{12}-\dfrac{x^2}{4}=1$　　C. $\dfrac{9y^2}{2}-\dfrac{x^2}{4}=1$　　D. $\dfrac{2y^2}{9}-\dfrac{x^2}{4}=1$

8.已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\sin^2 x-2$，以下说法中，正确的是（　　）

①函数 $f(x)$ 关于点 $\left(\dfrac{\pi}{12},0\right)$ 对称；②函数 $f(x)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增；

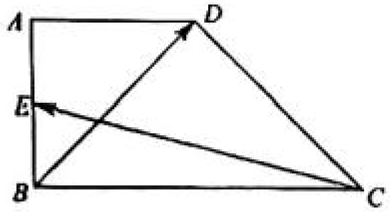
③当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 时，$f(x)$ 的取值范围为 $(-2,0)$；

④将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位长度，所得图象对应的解析式为

$g(x)=2\sin 2x-1$.

A.①②　　B.②③④　　C.①③　　D.②

9.如图所示，梯形 $ABCD$ 中，$AD\,//\,BC$，点 E 为 AB 的中点，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AD}=4$，若向量 $\overrightarrow{CE}$ 在向量 $\overrightarrow{CB}$ 上的投影向提的模为 4，设 M、N 分别为线段 CD、AD 上的动点，且 $\overrightarrow{CM}=\lambda\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{9\lambda}\overrightarrow{AD}$，则 $\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{EN}$ 的取值范围是（　　）



A. $\left[\dfrac{11}{9},+\infty\right)$　　B. $\left[\dfrac{11}{9},\dfrac{13}{9}\right]$　　C. $\left[\dfrac{13}{9},\dfrac{61}{9}\right]$　　D. $\left[\dfrac{11}{9},\dfrac{61}{9}\right]$

第Ⅱ卷　非选择题（共 105 分）

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.把答案填在答题卡中的相应横线上）

10.设复数 z 满足 $(3+4\mathrm{i})z=1-2\mathrm{i}$（$\mathrm{i}$ 为虚数单位），则 $|z|$ 的值为______.

11.二项式 $\left(x^2-\dfrac{3}{x}\right)^3$ 的展开式中含 x 的系数为______.

12.已知圆经过点 $(3,0)$ 和点 $(1,-2)$，圆心在直线 $x+2y-1=0$ 上，则圆的方程为______.

13.袋子中装有 n 个白球，3 个黑球，2 个红球，已知若从袋中每次取出 1 球，取出后不放回，在第一次取到黑球的条件下，第二次也取到黑球的概率为 $\dfrac{1}{3}$，则 n 的值为______，若从中任取 3 个球，用 X 表示取出 3 球中黑球的个数，则随机变量 X 的数学期望 $E(X)=$______.

14 已知 $a>0$，$b>0$，且 $ab=1$，则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a+b}$ 的最小值为______.

15.定义函数 $\min\{f(x),g(x)\}=\begin{cases}f(x),f(x)\le g(x)\\ g(x).f(x)>g(x)\end{cases}$，设

$h(x)=\min\{||x-1-1||,x^2+ax-3a-8\}$，

若$h(x)=0$恰有3个不同的实数报，则实数a的取值范围是______.

三、解答题（本大题5小题，共75分.解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤）

16.（本小题满分14分）

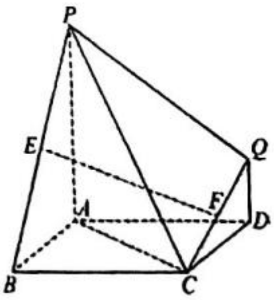
在$\triangle ABC$中，内角A、B、C的对边分别为a、b、c，已知$2\sin C=\sin A+\cos A\tan B$.

（1）求角B的大小；

（2）设$a=2$，$c=3$，求b和$\sin(2A-B)$的值.

17.（本小题满分15分）

已知底面$ABCD$是正方形，$PA\perp$平面$ABCD$，$PA\,//\,DQ$，$PA=AD=3DQ=3$，点E、F分别为线段PB、CQ的中点.



（1）求证：$EF\,//$平面$PADQ$；

（2）求平面PCQ与平面CDQ夹角的余弦值；

（3）线段PC上是否存在点M，使得直线AM与平面PCQ所成角的正弦值是$\dfrac{\sqrt{42}}{7}$，若存在求出$\dfrac{PM}{MC}$的值，若不存在，说明理由.

18.（本小题满分15分）

已知椭圆C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的右焦点为点$F$，$A$、$B$分别为椭圆$C$的上、下顶点，若椭圆中心到直线$AF$的距离为其短轴长的$\dfrac{1}{4}$.

（1）求椭圆的离心率；

（2）过点B且斜率为k（$k>0$）的直线l交椭圆C于另一点N（异于椭圆的右顶点），交x轴于点P，直线AN与直线$x=a$相交于点Q，过点A且与PQ平行的直线截椭圆所得弦长为$\sqrt{14}$，求椭圆C的标准方程.

19.（本小题满分15分）

已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}-a_n=2$，其前8项的和为64；数列$\{b_n\}$是公比大于0的等比数列，$b_1=3$，$b_3-b_2=18$.

（1）求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（2）记 $c_n=\dfrac{a_{n+2}-1}{a_na_{n+1}b_n}$， $n\in\mathbf{N}^*$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n；

（3）记 $d_n=\begin{cases}(-1)^{\frac{n+1}{2}}\cdot a_n, n\text{为奇数}\\ \dfrac{a_{\frac{n}{2}}+1}{b_{\frac{n}{2}}}, n\text{为偶数}\end{cases}$，求 $S_{2n}=\sum\limits_{k=1}^{2n}d_k$.

20.（本小题满分 16）

已知函数 $f(x)=ae^x-\sin x-a$.（注：$e=2.718281\cdots$ 是自然对数的底数）.

（1）当 $a=2$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（2）当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内有唯一的极值点 x_1.

（ⅰ）求实数 a 的取值范围；

（ⅱ）求证：$f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 内有唯一的零点 x_0，且 $x_0<2x_1$.