机密★启用前(全国卷文科数学)

# 华大新高考联盟2021届高三1月教学质量测评

# 文科数学

命题:华中师范大学考试研究院

本试题卷共4页,23题(含选考题)。全卷满分150分。考试用时120分钟。

**注意事项:**

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

**一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。**

1. 若集合 $A=\{-1,2\}$,$B=\{x|x^2-4x+m=0\}$,且 $A\cup B=\{-1,2,5\}$,则

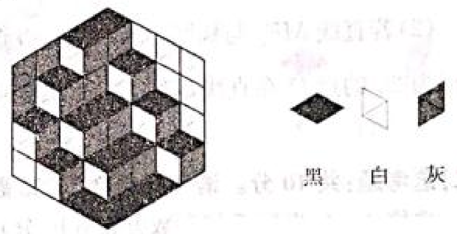
A. $2\in B$　　B. $5\notin B$　　C. $1\in B$　　D. $-1\in B$

2. 下列各式的运算结果为纯虚数的是

A. $i+i^2+i^3$　　B. $(2i-1)\cdot 3i$

C. $(1-i)^2$　　D. $i(1-2i)$

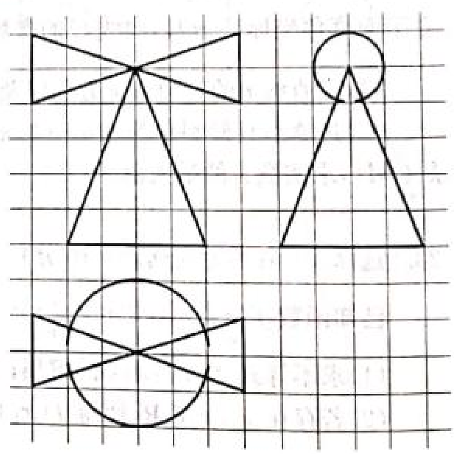
3. 世界著名的数学杂志《美国数学月刊》于1989年曾刊登过一个红极一时的棋盘问题. 题中的正六边形棋盘,用三种全等(仅朝向和颜色不同)的菱形图案全部填满(如图),向棋盘内随机投掷1点,则该点不落在黑色区域内的概率为




A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{4}$

4. 剑玉起源于11世纪,是一种传统的日本民间游戏,其玩法有上千种,受到世界各地年轻人的喜爱. 下图网格纸中小正方形的边长为1,粗线画出的是一个"剑玉杯"的三视图,则该"剑玉杯"的表面积为



A. $4\sqrt{10}\pi+4\sqrt{29}\pi+6\pi$

B. $4\sqrt{15}\pi+4\sqrt{29}\pi+6\pi$

C. $2\sqrt{15}\pi+2\sqrt{29}\pi+6\pi$

D. $2\sqrt{10}\pi+2\sqrt{29}\pi+6\pi$

5. 已知△$ABC$中,点 $D$ 为线段 $BC$ 的中点,若 $3\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{AD}=\mathbf{0}$,则 $\overrightarrow{BE}=$

A. $-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CE}$　　B. $-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CE}$

C. $-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CE}$　　D. $-\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CE}$

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} e^x+x, x<0, \\ |x^{\frac{1}{2}}-1|+x, x\geq 0, \end{cases}$ 若函数 $g(x)=f(x)-m$ 有 3 个不同的零点，则实数 $m$ 的取值范围为

A. $\left(\frac{3}{4},1\right)$　　B. $\left(-\infty,\frac{3}{4}\right)\cup(1,+\infty)$

C. $\left(-\infty,\frac{3}{4}\right)$　　D. $\left(\frac{3}{4},+\infty\right)$

7. 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB\perp BC$，$AC=AA_1$，$D,E,F$ 分别是所在棱的中点；现有 3 个图形如下所示，则满足 $CF\perp DE$ 的图形个数为

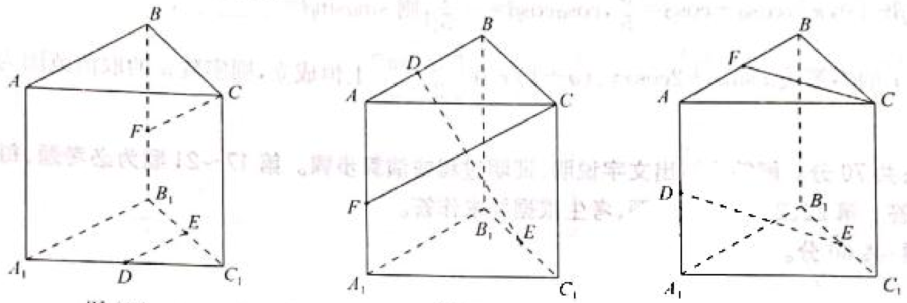



图 (1)　　图 (2)　　图 (3)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

8. "提丢斯数列"，是由 18 世纪德国数学家提丢斯给出，具体如下：0，3，6，12，24，48，96，192，…，容易发现，从第 3 项开始，每一项是前一项的 2 倍；将每一项加上 4 得到一个数列：4，7，10，16，28，52，100，196，…；再将每一项除以 10 后得到"提丢斯数列"：0.4，0.7，1.0，1.6，2.8，5.2，10.0，…，则下列说法中，正确的是

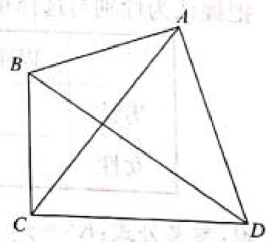
A. "提丢斯数列"是等比数列

B. "提丢斯数列"的第 99 项为 $\frac{3\cdot 2^{98}+4}{10}$

C. "提丢斯数列"前 31 项和为 $\frac{3\cdot 2^{30}}{10}+\frac{121}{10}$

D. "提丢斯数列"中，不超过 20 的有 9 项

9. 如图所示，平面四边形 $ABCD$ 中，$\angle BCD=90^\circ$，$\angle ABC=135^\circ$，$AB=6$，$AC=3\sqrt{10}$，$CD=5\sqrt{2}$，则 $ABCD$ 的面积为




A. 39　　B. 36

C. 42　　D. 48

10. 已知直线 $l:2x-y+4=0$ 与 y 轴交于点 $M$，抛物线 $C:x^2=2py\,(p\in(0,3))$ 的准线为 $l'$，点 $A$ 在抛物线 $C$ 上，点 $B$ 在 $l'$ 上，且 $AB\perp l'$，$\angle ABM=\angle AMB$，$\angle MAB=120^0$，则 $p=$

A. $\frac{6}{7}$　　B. $\frac{12}{7}$　　C. $\frac{4}{5}$　　D. $\frac{8}{5}$

11. 已知函数 $f(x)=4\cos 3x$，将函数 $f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{5\pi}{9}$ 个单位后，得到函数 $g(x)$ 的图像，若函数 $g(x)$ 在 $\left[0,\frac{m}{3}\right]$ 和 $\left[5m,\frac{17\pi}{12}\right]$ 上单调递增，则实数 $m$ 的取值范围为

A. $\left[\frac{\pi}{9},\frac{\pi}{4}\right)$　　B. $\left[\frac{2\pi}{9},\frac{\pi}{4}\right)$　　C. $\left[\frac{2\pi}{9},\frac{\pi}{3}\right]$　　D. $\left[\frac{2\pi}{9},\frac{17\pi}{60}\right)$

12. 已知双曲线 $C$：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1$，$F_2$，$|AF_2|-|AF_1|=|BF_1|-|BF_2|=2a$，且 $\angle BF_2F_1=135°$，若 $\overrightarrow{BF_2}=7\overrightarrow{AF_1}$，则双曲线 $C$ 的渐近线方程为

A. $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$　　B. $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}x$　　C. $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{4}x$　　D. $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$

**二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。**

13. 若实数 $x,y$ 满足 $\begin{cases}x+y-4\leqslant 0,\\ x-y+2\geqslant 0,\\ y+1\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=2x+y$ 的最大值为________.

14. 已知函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}+e^{x-1}$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为________.

15. 已知 $\alpha,\beta\in[0,\pi]$，$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{3}{5}$，$\cos\alpha\cos\beta=-\frac{1}{5}$，则 $\sin\alpha\sin\beta=$________.

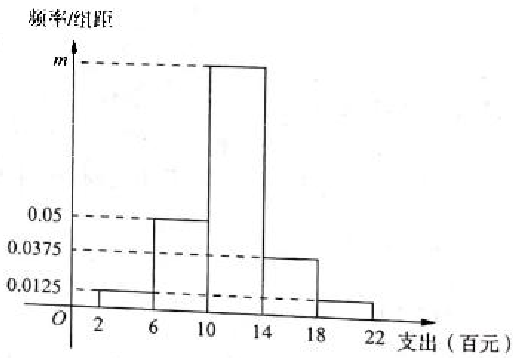
16. 若关于 $x$ 的不等式 $x\sin x+2\cos x\leqslant(a+1)x$ 在 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 上恒成立，则实数 $a$ 的取值范围为________.

**三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。**

**（一）必考题：共 60 分。**

17.（12 分）

教育部官方数据显示，2020 届大学毕业生达到 844 万，根据相关调查，位于大城市的应届毕业生毕业后，约有 30% 会留在该城市进行就业，于是租房便成为这些毕业生的首选. 为了了解应届毕业生房租支出的费用，研究人员对部分毕业生进行相关调查，所得数据如图所示：




（1）求 $m$ 的值以及房租支出的平均值 $\bar{x}$；

（2）为了了解应届生选择租房时考虑的主要因素，研究人员作出调查，所得数据如下表所示，判断是否有 99.9% 的把握认为性别与选择租房时考虑的主要因素具有相关性.

| | 以距离上班地点的远近作为主要考虑因素 | 以房租的高低作为主要考虑因素 |
|---|---|---|
| 男性 | 500 | 300 |
| 女性 | 300 | 400 |

附：参考公式：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

参考数据：

| $P(K^2\geqslant k)$ | 0.100 | 0.050 | 0.010 | 0.001 |
|---|---|---|---|---|
| $k$ | 2.706 | 3.841 | 6.635 | 10.828 |

18.（12 分）

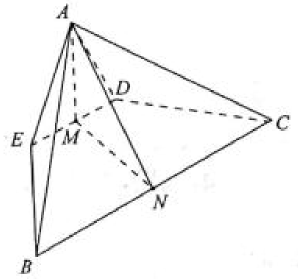
已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，其中 $S_3$，$3a_7$，$3a_{22}$ 成等比数列，且 $S_5+a_8=S_6+4$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若数列$\{b_n\}$满足$3^n a_n-4^n b_n=0$，探究：是否存在正整数m，使得$b_m>4$？若存在，求出$m$的值；若不存在，请说明理由.

19.(12分)

已知四棱锥$A-BCDE$中，$BCDE$为等腰梯形，且$BC//DE$，$\triangle ADE$为等边三角形，平面$ADE\perp$平面$BCDE$，$M,N$分别是线段$DE,BC$的中点.




(1)求证：$DE\perp$平面$AMN$；

(2)若$AE+EB=BC=a$，$\angle EBC=60°$，则当$AB$最小时，求四棱锥$A-BCDE$的体积.

20.(12分)

已知函数$f(x)=x^2+a\ln x-x-1$.

(1)讨论函数$f(x)$的单调性；

(2)若$a=2$，求证：$f(x)\geqslant 2x\ln x-\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上恒成立.

21.(12分)

已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，点$A$在椭圆上运动，$\triangle AF_1F_2$面积的最大值为$\sqrt{3}$，且当$AF_2\perp F_1F_2$时，$|AF_2|=\frac{3}{2}$.

(1)求椭圆$C$的方程；

(2)若直线$MF_2$与椭圆的两个交点分别为$M$、$N$，且$M,N$都不在$x$轴上，过点$N$作$y$轴的垂线$l$，若横坐标为$2a$的点$D$在直线$l$上，求证：直线$MD$过$\left(\frac{5}{2},0\right)$.

**(二)选考题：共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答，如果多选，则按所做的第一题计分。**

22.[选修4—4：坐标系与参数方程](10分)

已知极坐标系中，直线$l$的极坐标方程为$\rho\cos\theta=4$，以极点为原点，极轴所在直线为$x$轴的非负半轴建立平面直角坐标系$xOy$，曲线$C$的参数方程为$\begin{cases}x=2\cos2\varphi,\\ y=2+4\sin\varphi\cos\varphi,\end{cases}$($\varphi$为参数).

(1)求直线$l$的直角坐标方程以及曲线$C$的极坐标方程；

(2)过原点且倾斜角为$\alpha(\alpha\in[0,\pi))$的直线$l'$与直线$l$交于点$M$，与曲线$C$交于$O,N$两点，若$|ON|=\lambda|OM|$，求实数$\lambda$的最大值.

23.[选修4—5：不等式选讲](10分)

已知函数$f(x)=|x+1|-\left|x-\frac{3}{2}\right|$.

(1)求不等式$f(x)\geqslant 3x$的解集；

(2)若存在$x_1,x_2\in\mathbf{R}$，使得$f(x_1)+|2x_2-m|+|2x_2+1|=0$，求实数$m$的取值范围.

机密★启用前(全国卷文科数学)

# 华大新高考联盟2021届高三1月教学质量测评

## 文科数学参考答案和评分标准

一、选择题

1.【答案】D

【命题意图】本题考查集合的运算、元素与集合的关系，考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，$5\in B$，则 $25-20+m=0$，解得 $m=-5$，故 $B=\{-1,5\}$；观察可知，故选 D.

2.【答案】C

【命题意图】本题考查复数的概念、复数的运算，考查考生数学运算的核心素养.

【解析】依题意，$\mathrm{i}+\mathrm{i}^3-\mathrm{i}^4=-1$，$(2\mathrm{i}-1)+3\mathrm{i}=5\mathrm{i}-1$，$(1-\mathrm{i})^2=-2\mathrm{i}$，$\mathrm{i}(1-2\mathrm{i})=2+\mathrm{i}$，故选 C.

3.【答案】B

【命题意图】本题考查数学文化、古典概型的概率，考查考生数学建模、数学运算的核心素养.

【解析】由图可知，棋盘共计 48 个菱形，其中有 16 个黑色的菱形，故所求概率 $P=1-\frac{16}{48}=\frac{2}{3}$，故选 B.

4.【答案】D

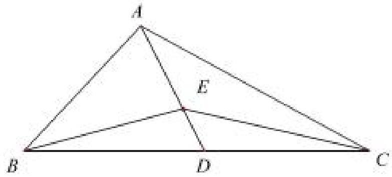
【命题意图】本题考查三视图、空间几何体的表面积与体积，考查考生直观想象、逻辑推理、数学建模的核心素养.

【解析】由三视图可知，该“剑玉杆”的表面积 $S=(\pi\times1\times\sqrt{10}+\pi\times1^2)\times2+\pi\times2\times\sqrt{29}+\pi\times2^2=2\sqrt{10}\pi+2\sqrt{29}\pi+6\pi$，故选 D.

5.【答案】B

【命题意图】本题考查平面向量的基本定理、向量共线的充要条件，考查考生直观想象、逻辑推理的核心素养.

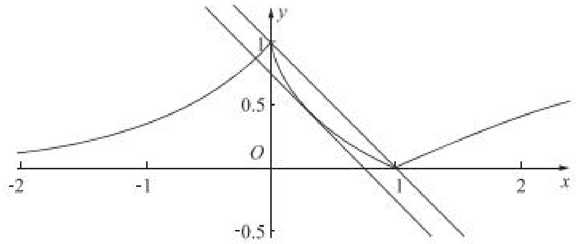
【解析】作出图形如下所示；观察可知，$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}=2(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EC})+\overrightarrow{CE}=2\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CE}\right)+\overrightarrow{CE}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CE}$，故选 B.




6.【答案】A

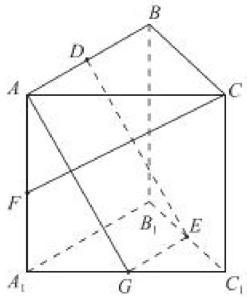
【命题意图】本题考查分段函数的图像与性质，考查考生直观想象、逻辑推理的核心素养.

【解析】令 $h(x)=\begin{cases}e^x, x<0,\\ |x^{\frac{1}{2}}-1|, x\geqslant0.\end{cases}$ 则 $g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=m\Leftrightarrow h(x)=-x+m$，故问题转化为 $y=h(x)$，$y=-x+m$ 有 3 个不同的交点；其临界状态如下图所示；令 $1-\sqrt{x}=-x+m$，则 $x^2+(1-2m)x+$



$(1-m)^2=0$,令 $\Delta=0$,解得 $m=\frac{3}{4}$,故 $\frac{3}{4}<m<1$,故选 A.

7.【答案】C




【命题意图】本题考查空间线面的位置关系,考查考生直观想象、逻辑推理的核心素养.

【解析】图(1)中,可以证明 $DE\perp$ 平面 $BC_1$,进而得到 $CF\perp DE$;图(2)中,取 $A_1C_1$ 的中点 $G$,连接 $GE$,$AG$,故 $AGED$ 为平行四边形,故 $ED//AG$,而 $AC=AA_1$,故 $AG\perp CF$,故 $CF\perp DE$;图(3)中,$CF\perp DE$ 不成立;故选 C.

8.【答案】C

【命题意图】本题考查数学文化、等比数列的通项公式与前 $n$ 项和公式、分组求和法,考查考生数学运算、逻辑推理、数学建模的核心素养.

【解析】记"提丢斯数列"为数列 $\{a_n\}$,则当 $n\geqslant3$ 时,$10a_n-4=6\cdot2^{n-3}$,解得 $a_n=\frac{3\cdot2^{n-2}+4}{10}$,易知当 $n=2$ 时,$a_2=0.7$,符合该式,当 $n=1$ 时,$a_1=0.55\neq0.4$,

故 $a_n=\begin{cases}0.4, n=1,\\ \frac{3\cdot2^{n-2}+4}{10}, n\geqslant2,\end{cases}$ 故 A 错误,

而 $a_{99}=\frac{3\cdot2^{97}+4}{10}$,故 B 错误;

"提丢斯数列"前 31 项和为 $\frac{2}{5}+\frac{3}{10}(2^0+\cdots+2^{29})+\frac{2}{5}\times30=\frac{3\cdot2^{30}}{10}+\frac{121}{10}$,故 C 正确;

令 $\frac{3\cdot2^{n-2}+4}{10}\leqslant20$,则 $2^{n-2}\leqslant\frac{196}{3}$,故 $n=2,3,4,5,6,7,8$,而 $a_1<20$,故不超过 20 的有 8 项,故 D 错误;

故选 C.

9.【答案】A

【命题意图】本题考查正弦定理、余弦定理、三角形的面积公式,考查考生数学运算、逻辑推理、数学建模的核心素养.

【解析】在 $\Delta ABC$ 中,由正弦定理,$\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{AB}{\sin\angle BCA}$,解得 $\sin\angle BCA=\frac{\sqrt5}{5}=\cos\angle ACD$,$\cos\angle BCA=\frac{2\sqrt5}{5}=\sin\angle ACD$,由余弦定理,$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC$,即 $BC^2+6\sqrt2BC-54=0$,解得 $BC=3\sqrt2$;则 $ABCD$ 的面积 $S=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC+\frac{1}{2}AC\cdot CD\cdot\sin\angle ACD=39$,

故选 A.

10.【答案】D

【命题意图】本题考查抛物线的方程与性质,考查考生数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】依题意,$M(0,4)$,不妨设点 A 在第一象限,$|MA|=m$,易知 $\triangle MAF$ 为等边三角形,故 $A\left(\frac{\sqrt3}{2}m,\frac{m}{2}+\frac{p}{2}\right)$,代入 $C:x^2=2py$ 中,故 $\frac{3}{4}m^2=2p\left(\frac{m}{2}+\frac{p}{2}\right)$,解得 $m=2p$;而 $|MO|=4$,则 $2p+\frac{p}{2}=4$,

解得 $p=\frac{8}{5}$,故选 D.

11.【答案】D

【命题意图】本题考查三角函数的图像与性质,考查考生数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

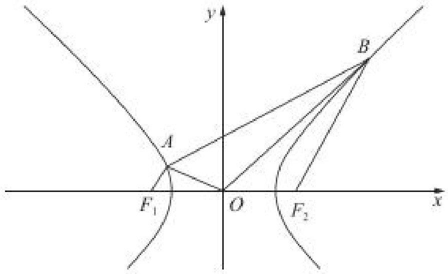
【解析】将函数 $f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{5\pi}{9}$ 个单位后，得到 $f\left(x+\frac{5\pi}{9}\right)=4\cos\left(3x+\frac{5\pi}{3}\right)=4\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)$，故

$$\begin{cases} m>0, \\ \frac{m}{3}\leqslant\frac{\pi}{9}, \\ 5m\geqslant\frac{10\pi}{9}, \\ 5m<\frac{17\pi}{12}, \end{cases}$$ 解得 $\frac{2\pi}{9}\leqslant m<\frac{17\pi}{60}$，故选 D.

12.【答案】B

【命题立意】本题考查双曲线的方程与性质，考查考生数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】作出图形如下所示，不妨设 $A(m-c,m)$，




则 $B(c+7m,7m)$，则 $\begin{cases} \frac{(m-c)^2}{a^2}-\frac{m^2}{b^2}=1,\cdots(1) \\ \frac{(c+7m)^2}{a^2}-\frac{49m^2}{b^2}=1,\cdots(2) \end{cases}$

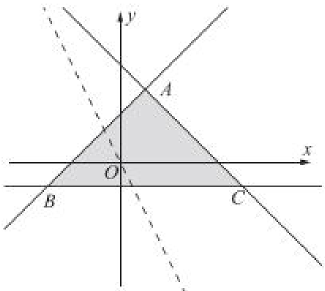
由(1)×49−(2)得 $m=\frac{3(c^2-a^2)}{7c}=\frac{3b^2}{7c}$，将 $m=\frac{3b^2}{7c}$ 代入(1)得 $9a^4-17a^2c^2+8c^4=0$，解得 $9a^2=8c^2$ 或 $a^2=c^2$（舍去），则 $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，故双曲线 $C$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}x$，故选 B.

## 二、填空题

13.【答案】9.

【命题意图】本题考查二元一次不等式组与平面区域、线性规划，考查考生数学运算、直观想象的核心素养.

【解析】作出不等式组所表示的平面区域如下图阴影部分所示；观察可知，当直线 $z=2x+y$ 过点 $C$ 时，$z$ 有最大值；联立 $\begin{cases} x+y-4=0, \\ y+1=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=5, \\ y=-1, \end{cases}$ 故 $C(5,-1)$，故 $z=2x+y$ 的最大值为 9.




14.【答案】$y=2x-1$.

【命题意图】本题考查导数的运算、导数的几何意义、直线的方程，考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，$f'(x)=\frac{1-2\ln x}{x^3}+e^{x-1}$，故 $f'(1)=2$；而 $f(1)=1$，故所求切线方程为 $y-1=2(x-1)$，即 $y=2x-1$.

15.【答案】$\frac{\sqrt{7}}{5}$.

【命题意图】本题考查三角恒等变换，考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，$(\sin\alpha\sin\beta)^2=\sin^2\alpha\sin^2\beta=(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)=(1+\cos\alpha\cos\beta)^2-(\cos\alpha+\cos\beta)^2=\frac{7}{25}$，则 $\sin\alpha\sin\beta=\frac{\sqrt{7}}{5}$.

16.【答案】$[0,+\infty)$.

【命题意图】本题考查利用导数研究函数的性质，考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】令 $f(x)=x\sin x+2\cos x-x$；因为 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)\leqslant\frac{\pi}{2}a$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，故 $a\geqslant0$；而 $f'(x)=-\sin x+x\cos x-1$；

令 $g(x)=-\sin x+x\cos x-1$，则 $g'(x)=-x\sin x$，故当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

当 $x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ 时，$g'(x)>0$，故函数 $g(x)$ 的最小值为 $g(\pi)=-\pi-1$；又 $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2$，$g\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$，

故当 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 时，$g(x)\leqslant0$，即 $f'(x)\leqslant0$，故 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 上单调递减；因为 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，

故当 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 时，$f(x)\leqslant0$，且当 $a\geqslant0$ 时，$ax\geqslant0$，故 $f(x)\leqslant ax$ 恒成立，综上所述，实数 $a$ 的取值范围为 $[0,+\infty)$.

三、解答题

17.【命题意图】本题考查样本的数字特征、频率分布直方图、独立性检验，考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)依题意，$(0.0125+0.05+m+0.0375+0.0125)\times4=1$，

解得 $m=0.1375$； ……………………………………………………………………………………（3分）

故 $\bar{x}=(0.0125\times4+0.05\times8+0.1375\times12+0.0375\times16+0.0125\times20)\times4=11.8$； ……………（6分）

(2)在本次试验中，$K^2$ 的观测值 $k_0=\frac{1500\times(500\times400-300\times300)^2}{800\times800\times700\times700}\approx57.876>10.828$， ……（10分）

故有99.9%的把握认为性别与选择租房时考虑的主要因素具有相关性. ………………………（12分）

18.【命题意图】本题考查等差数列的基本运算、数列的性质，考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)依题意，$S_5+a_8=S_6+4\Rightarrow a_8=a_6+4\Rightarrow d=2$， ……………………………………（2分）

而 $9a_7^2=S_3\cdot3a_{22}$，即 $9(a_1+12)^2=9(a_1+2)(a_1+42)$， ………………………………………（4分）

解得 $a_1=3$，故 $a_n=a_1+2(n-1)=2n+1$； ……………………………………………………（6分）

(2)由 $3^na_n-4^nb_n=0$，可得 $b_n=\left(\frac{3}{4}\right)^n\cdot(2n+1)$，

则 $b_{n+1}-b_n=(2n+3)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-(2n+1)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n=\frac{3^n}{4^{n+1}}[3(2n+3)-4(2n+1)]=\frac{3^n}{4^{n+1}}(5-2n)$，

……………………………………………………………………………………………………（8分）

所以 $b_{n+1}>b_n\Leftrightarrow b_{n+1}-b_n>0\Leftrightarrow5-2n>0\Leftrightarrow n<2.5\Leftrightarrow n=1,2$； ………………………（9分）

$b_{n+1}<b_n\Leftrightarrow b_{n+1}-b_n<0\Leftrightarrow5-2n<0\Leftrightarrow n>2.5\Leftrightarrow n=3,4,5,\cdots$； ……………………（10分）

故 $b_1<b_2<b_3>b_4>b_5>b_6>\cdots$，

故数列 $\{b_n\}$ 的最大项为 $b_3=(2\times3+1)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{7\times27}{64}$. ……………………………………（11分）

显然 $b_3<4$，故不存在正整数 $m$，使得 $b_m>4$. ………………………………………………（12分）

19.【命题意图】本题考查空间线面的位置关系、空间几何体的体积，考查考生直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)因为 $\triangle ADE$ 为等边三角形，故 $M$ 是线段 $DE$ 的中点，故 $AM\perp DE$； ………………（2分）

而 $BC//DE$，$BE=DC$，$N$ 分别是线段 $BC$ 的中点，故 $MN\perp DE$； ………………………………（2分）

而 $AM\cap MN=M$，故 $DE\perp$ 平面 $AMN$； ………………………………………………………（5分）

(2)设 $AB=d$，平面 $ADE\perp$ 平面 $BCDE$，$AM\perp DE$，所以 $AM\perp$ 平面 $BCDE$；

连结 $BM$，则 $AM^2+BM^2=d^2$；

设 $AM=x$，$MN=\frac{\sqrt{3}}{2}a-x$，故 $BM^2=MN^2+BN^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a-x\right)^2+\frac{1}{4}a^2$， ……………………（7分）

故 $d^2=x^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a-x\right)^2+\frac{1}{4}a^2=2\left(x-\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)^2+\frac{5}{8}a^2$，……………………………………………（9分）

当 $x=\frac{\sqrt{3}}{4}a$ 时，$d_{\min}=\frac{\sqrt{10}}{4}a$． ……………………………………………………（10分）

此时四棱锥 $A-BCDE$ 的体积为$\frac{1}{3}\cdot S_{梯形BCDE}\cdot AM=\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times\frac{\sqrt{3}}{4}a=\frac{3}{64}a^3$． …（12分）

20.【命题意图】本题考查利用导数研究函数的性质，考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)依题意，$x\in(0,+\infty)$，$f'(x)=2x-\frac{a}{x}-1=\frac{2x^2-x+a}{x}$， ……………………………（1分）

则 $\Delta=1-8a$，…………………………………………………………………………………（2分）

若 $a\geqslant\frac{1}{8}$，则 $\Delta=1-8a\leqslant0$，则 $f'(x)\geqslant0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；……………………（3分）

若 $a<\frac{1}{8}$，令 $2x^2-x-a=0$，则 $x=\frac{1\pm\sqrt{1-8a}}{4}>0$，………………………………………（4分）

（ⅰ）$0<a<\frac{1}{8}$时，$\frac{1\pm\sqrt{1-8a}}{4}>0$，

当 $x\in\left(0,\frac{1-\sqrt{1-8a}}{4}\right)$时，$f'(x)>0$，当 $x\in\left(\frac{1-\sqrt{1-8a}}{4},\frac{1+\sqrt{1-8a}}{4}\right)$时，$f'(x)<0$，

当 $x\in\left(\frac{1+\sqrt{1-8a}}{4},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$，……………………………………………（5分）

（ⅱ）$a\leqslant0$ 时，$\frac{1-\sqrt{1-8a}}{4}\leqslant0$，$\frac{1-\sqrt{1-8a}}{4}>0$

当 $x\in\left(0,\frac{1-\sqrt{1-8a}}{4}\right)$时，$f'(x)<0$，当 $x\in\left(\frac{1+\sqrt{1-8a}}{4},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$，

综上：①$a\geqslant\frac{1}{8}$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

② $0<a<\frac{1}{8}$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1-\sqrt{1-8a}}{4}\right)$ 和 $\left(\frac{1+\sqrt{1-8a}}{4},+\infty\right)$ 上单调递增；$f(x)$ 在 $\left(\frac{1-\sqrt{1-8a}}{4},\frac{1+\sqrt{1-8a}}{4}\right)$上单调递减；

③$a\leqslant0$ 时，$f(x)$在$\left(0,\frac{1-\sqrt{1-8a}}{4}\right)$上单调递减，$f(x)$在$\left(\frac{1+\sqrt{1-8a}}{4},+\infty\right)$上单调递增. ……（6分）

(2)要证：$f(x)\geqslant2x\ln x-\frac{1}{x}$，

即证：$x^2-x+\frac{1}{x}-1+2\ln x-2x\ln x\geqslant0$，

即证：$x(x-1)-\frac{x-1}{x}-2(x-1)\ln x\geqslant0$，

即证：$(x-1)\left(x-\frac{1}{x}-2\ln x\right)\geqslant0$，…………………………………………………（8分）

令 $g(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x$，则 $g'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=\frac{(x-1)^2}{x^2}\geqslant0$，…………………………（9分）

所以 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，又 $g(1)=0$，……………………………………………（10分）

所以当 $0<x<1$ 时，$g(x)<0$；当 $x>1$ 时，$g(x)>0$，………………………………………（11分）

所以$(x-1)\left(x-\frac{1}{x}-2\ln x\right)\geqslant0$，即 $f(x)\geqslant2x\ln x-\frac{1}{x}$．…………………………………（12分）

21.【命题意图】本题考查椭圆的方程、直线与椭圆综合性问题，考查考生直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

(1)依题意，$bc=\sqrt{3}$①，……（1 分）

$\frac{b^2}{a}=\frac{3}{2}$②；……（2 分）

由①可得，$b^2c^2=3$，即 $b^2(a^2-b^2)=3$③；

由②可得，$b^2=\frac{3}{2}a$④，

将④代入③中，整理可得，$2a^3-3a^2-4=0$，即 $2a^3-4a^2+a^2-4=0$，

即 $(a-2)(2a^2+a+2)=0$；

因为 $2a^2+a+2>0$，故 $a=2$，则 $b^2=3$.

故椭圆 $C$ 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；……（5 分）

(2)设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$；

①当直线 $MN$ 与 $x$ 轴垂直时，$x_1=x_2=1$，$y_1+y_2=0$，且 $|y_1|=|y_2|=\frac{3}{2}$，

故 $M(1,y_1)$，$N(1,-y_1)$，$D(4,-y_1)$，

这时直线 $MD$ 的方程为 $y-y_1=\frac{-y_1-y_1}{4-1}(x-1)$，即 $y-y_1=-\frac{2}{3}y_1(x-1)$.

令 $y=0$，得 $x=\frac{5}{2}$，所以直线 $MD$ 过 $\left(\frac{5}{2},0\right)$；……（6 分）

②当直线 $MN$ 不与 $x$ 轴垂直时，可设其方程为 $y=k(x-1)$，代入 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，

整理得 $(3+4k^2)x^2-8k^2x+4(k^2-3)=0$，

所以 $x_1+x_2=\frac{8k^2}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4(k^2-3)}{3+4k^2}$，

因为 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$D(4,y_2)$，

所以直线 $MD$ 的方程为 $y=\frac{y_2-y_1}{4-x_1}(x-x_1)+y_1$.……（8 分）

因为 $y_1=k(x_1-1)$，$y_2=k(x_2-1)$，

所以 $\frac{y_2-y_1}{4-x_1}\left(\frac{5}{2}-x_1\right)+y_1=\frac{k(x_2-x_1)}{4-x_1}\left(\frac{5}{2}-x_1\right)+k(x_1-1)$

$=k\left[\frac{(x_2-x_1)}{4-x_1}\left(\frac{5}{2}-x_1\right)+(x_1-1)\right]=k\cdot\frac{(x_2-x_1)\left(\frac{5}{2}-x_1\right)+(4-x_1)(x_1-1)}{4-x_1}$

$=k\cdot\frac{\frac{5}{2}(x_1+x_2)-x_1x_2-4}{4-x_1}=k\cdot\frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{8k^2}{3+4k^2}-\frac{4(k^2-3)}{3+4k^2}-4}{4-x_1}$

$=k\cdot\frac{20k^2-4(k^2-3)-4(3+4k^2)}{(4-x_1)(3+4k^2)}=0$，这说明直线 $MD$ 过点 $\left(\frac{5}{2},0\right)$.……（11 分）

综上所述，直线 $MD$ 过 $\left(\frac{5}{2},0\right)$.……（12 分）

22.【命题意图】本题考查极坐标方程、参数方程、直角坐标方程、普通方程的转化以及极坐标方程的应用，考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)依题意，直线 $l$ 的直角坐标方程为 $x=4$；……（2 分）

因为曲线 C：$\begin{cases}x=2\cos2\varphi,\\ y=2+2\sin2\varphi,\end{cases}$ 故 $x^2+(y-2)^2=4$，…………（3 分）

故曲线 $C$ 的普通方程为 $x^2+y^2-4y=0$， …………（4 分）

则曲线 $C$ 的极坐标方程为 $\rho=4\sin\theta$； …………（5 分）

(2)依题意，直线 $l'$ 的极坐标方程为 $\theta=\alpha(\rho\in\mathbf{R})$

联立 $\begin{cases}\theta=\alpha,\\ \rho\cos\theta=4,\end{cases}$ 故 $|OM|=|\rho_M|=\dfrac{4}{|\cos\alpha|}$， …………（6 分）

由 $\begin{cases}\theta=\alpha,\\ \rho=4\sin\theta,\end{cases}$ 故 $|ON|=|\rho_N|=4|\sin\alpha|$， …………（7 分）

故 $\lambda=\dfrac{|ON|}{|OM|}=4|\sin\alpha|\cdot\dfrac{|\cos\alpha|}{4}=\dfrac{1}{2}|\sin2\alpha|$， …………（9 分）

所以当 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ 或 $\dfrac{3\pi}{4}$ 时，$\lambda$ 有最大值 $\dfrac{1}{2}$. …………（10 分）

23.【命题意图】本题考查绝对值不等式的解法、绝对值三角不等式的性质，考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)依题意，$|x+1|-\left|x-\dfrac{3}{2}\right|\geqslant3x$；

当 $x<-1$ 时，$-x-1+x-\dfrac{3}{2}\geqslant3x$，解得 $x\leqslant-\dfrac{5}{6}$，故 $x<-1$； …………（2 分）

当 $-1\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{2}$ 时，$x+1+x-\dfrac{3}{2}\geqslant3x$，解得 $x\leqslant-\dfrac{1}{2}$，故 $-1\leqslant x\leqslant-\dfrac{1}{2}$； …………（3 分）

当 $x>\dfrac{3}{2}$ 时，$x+1-x+\dfrac{3}{2}\geqslant3x$，解得 $x\leqslant\dfrac{5}{6}$，故无解；(4 分)

综上所述，不等式 $f(x)\geqslant3x$ 的解集为 $\left\{x\middle|x\leqslant-\dfrac{1}{2}\right\}$； …………（5 分）

(2)依题意，$\left||x+1|-\left|x-\dfrac{3}{2}\right|\right|\leqslant\left|x+1-x+\dfrac{3}{2}\right|=\dfrac{5}{2}$，

故 $-\dfrac{5}{2}\leqslant|x+1|-\left|x-\dfrac{3}{2}\right|\leqslant\dfrac{5}{2}$； …………（7 分）

而 $|2x-m|+|2x+1|\geqslant|2x-m-2x-1|=|m+1|$， …………（8 分）

故 $-|m+1|\geqslant-\dfrac{5}{2}$， …………（9 分）

即 $|m+1|\leqslant\dfrac{5}{2}$，则 $-\dfrac{7}{2}\leqslant m\leqslant\dfrac{3}{2}$，故实数 $m$ 的取值范围为 $\left[-\dfrac{7}{2},\dfrac{3}{2}\right]$. …………（10 分）