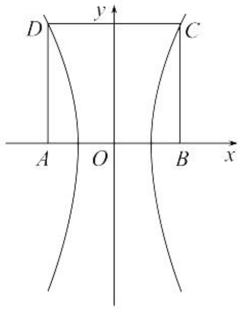
2023届“皖南八校”高三第二次大联考·数学
参考答案、解析及评分细则

1. C　因为 $A=\{-1,0,1,2,3\}$，$B=\{x|1\leqslant x\leqslant 3,x\in\mathbf{R}\}$，则 $A\cap B=\{1,2,3\}$. 故选 C.

2. D　设 $z=a+bi$，则 $|z-i|=|a+(b-1)i|=\sqrt{a^2+(b-1)^2}$，$z\cdot i=(a-bi)i=b+ai$. ∵ $|z-i|=\bar{z}\cdot i$，∴ $\sqrt{a^2+(b-1)^2}=b-ai$，解得 $\begin{cases}a=0,\\ b=\frac{1}{2},\end{cases}$ 即 $z=\frac{1}{2}i$. 故选 D.

3. C　因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是单位向量，所以 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=1$，故 $\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2=1$，$\boldsymbol{b}^2=|\boldsymbol{b}|^2=1$，由 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$ 得，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=3$，即 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=3$，解得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}$. 设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $|\boldsymbol{a}|\cos\theta\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$. 故选 C.

4. A　如图，正方形的顶点 A,B 为双曲线的焦点，顶点 C,D 在双曲线上，则 $A(-c,0)$，$B(c,0)$，故 $C\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$. 由正方形 $ABCD$ 得 $AB=BC$，所以 $2c=\frac{b^2}{a}$，则 $2ac=b^2=c^2-a^2$ 即 $c^2-2ac-a^2=0$，两边同除 a^2 得 $e^2-2e-1=0$，解得 $e=\sqrt{2}+1$ 或 $e=-\sqrt{2}-1$（舍）. 故选 A.



5. A　因为 $PA\perp AB$，$PA=12$，$AB=16$，所以 $PB=20$，在 $\triangle PBC$ 中，由正弦定理得 $\frac{PC}{\sin\angle PBC}=\frac{PB}{\sin\angle PCB}$，即 $\frac{10\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{20}{\sin\angle PCB}$，所以 $\sin\angle PCB=1$，取 PB 的中点 O，可知 O 为三棱锥 $P-ABC$ 外接球的球心，外接球的半径 $R=\frac{1}{2}PB=10$，所以三棱锥 $P-ABC$ 外接球的体积为 $V=\frac{4\pi}{3}R^3=\frac{4000}{3}\pi$，故选 A.

6. D　∵圆 C 的方程为 $x^2+y^2-6x+8=0$，整理得：$(x-3)^2+y^2=1$，∴圆心为 $C(3,0)$，半径 $r=1$，又∵直线 $y=kx+2$ 上至少存在一点，使得以该点为圆心，1 为半径的圆与圆 C 有公共点，∴点 C 到直线 $y=kx+2$ 的距离小于或等于 2，∴ $\frac{|3k-0+2|}{\sqrt{k^2+1}}\leqslant 2$，$5k^2+12k\leqslant 0$，化简得，解得 $-\frac{12}{5}\leqslant k\leqslant 0$，∴ k 的最小值是 $-\frac{12}{5}$. 故选 D.

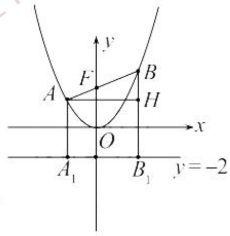
7. B　依题意每次抽取工人甲被抽到的概率 $P=\frac{C_5^2}{C_6^3}=\frac{1}{2}$，所以工人甲一周内被选中两次的概率为 $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，故 A 正确；依题意 ξ 的可能取值为 3、4、5、6，则 $P(\xi=3)=\frac{C_6^3}{C_6^3}\cdot\frac{1}{C_6^3}=\frac{1}{20}$，$P(\xi=6)=\frac{C_6^3}{C_6^3}\cdot\frac{C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20}$，所以 $P(\xi=3)=P(\xi=6)$，故 B 错误；对于 C，工人甲一周内至少被选中一次的概率为 $1-\left(1-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$，故 C 正确；$P(\xi=4)=\frac{C_6^3}{C_6^3}\cdot\frac{C_3^2C_3^1}{C_6^3}=\frac{9}{20}$，$P(\xi=5)=\frac{C_6^3}{C_6^3}\cdot\frac{C_3^1C_3^2}{C_6^3}=\frac{9}{20}$，所以 $P(\xi=4)=P(\xi=5)$，故 D 正确. 故选 B.

8. B　因为 $f(x)=-x^2-\cos x$，$x\in\mathbf{R}$，$f(-x)=-(-x)^2-\cos(-x)=-x^2-\cos x=f(x)$，所以 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数. 当 $x\geqslant 0$ 时，$f'(x)=-2x+\sin x$，$f''(x)=-2+\cos x<0$，所以 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f'(x)\leqslant f'(0)=0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减. 又因为 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增. 因为 $a=f(e^{-\frac{7}{8}})$，$b=f\left(\ln\frac{8}{9}\right)=f\left(\ln\frac{9}{8}\right)$，$c=f\left(-\frac{1}{8}\right)=f\left(\frac{1}{8}\right)$，由 $e^x\geqslant x+1$，得 $e^{-\frac{7}{8}}>$

$-\frac{7}{8}+1=\frac{1}{8}$,所以 $f(e^{-\frac{7}{8}})<f\left(\frac{1}{8}\right)$,由 $\ln x\leqslant x-1$,得 $\ln\frac{9}{8}<\frac{9}{8}-1=\frac{1}{8}$,所以 $f\left(\ln\frac{9}{8}\right)>f\left(\frac{1}{8}\right)$,从而有 $a<c<b$. 故选 B.

9. ABD　函数 $f(x)=\sum_{i=1}^{4}\frac{\sin[(2i-1)x]}{2i-1}=\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\frac{\sin 7x}{7}$,对于A,可以验证 $f(x+\pi)=f(-x)$,故A正确;对于B,同样可以验证 $f(x)=-f(-x)$,故B正确;对于C,由诱导公式易知 $f(x+\pi)=-f(x)\neq f(x)$,故C错误;对于D,易知 $f'(x)=\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x\leqslant 4$,故D正确. 故选 ABD.

10. AD　对于A,易知 $p=4$,从而准线方程为 $y=-2$,故A正确;对于B,如图分别过 A,B 两点作准线 $y=-2$ 的垂线,垂足分别为 A_1,B_1,过 A 点作 BB_1 的垂线,垂足为点 H. 由于 $3\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{FB}$,不妨设 $|AF|=t$,则 $|BF|=3t$,由抛物线的定义易知:$|AA_1|=t$,$|BB_1|=3t$,$|BH|=2t$,在直角△ABH 中,$\angle BAH=30^\circ$,此时 AB 的倾斜角为 30°,根据抛物线的对称性可知,AB 的倾斜角为 30° 或 150°,所以B错误;对于C,点 $M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$,由抛物线的定义知 $|AF|+|BF|=y_1+2+y_2+2=16$,有 $y_1+y_2=12$,所以 M 到 x 轴距离 $\frac{y_1+y_2}{2}=6$,C错误;对于D,由抛物线定义知 $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2}{p}=\frac{1}{2}$,所以 $4|AF|+|BF|=2(4|AF|+|BF|)\left(\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}\right)=2\left(5+\frac{|BF|}{|AF|}+\frac{4|AF|}{|BF|}\right)\geqslant 18$,当且仅当 $\frac{|BF|}{|AF|}=\frac{4|AF|}{|BF|}$,即 $|BF|=2|AF|$ 时取得等号,所以D正确. 故选 AD.



11. ACD　对于A,如图1,在△ACQ 中,因为 M,N 为 AC,AQ 的中点,所以 $MN\parallel CQ$,所以 CN 与 QM 共面,所以A正确;

对于B,由 $V_{A-DMN}=V_{N-ADM}$,因为 N 到平面 $ABCD$ 的距离为定值2,且△ADM 的面积为1,所以三棱锥 $A-DMN$ 的体积为 $\frac{2}{3}$,所以B错误;

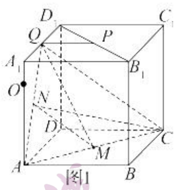


图1

对于C,如图2,展开平面 A_1ADD_1,使点 A_1ADD_1 共面,过 O 作 $OP\perp B_1D_1$,交 B_1D_1 与点 P,交 A_1D_1 与点 Q,则此时 $PQ+QO$ 最小,易求 $PQ+QO$ 的最小值为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$,则C正确;

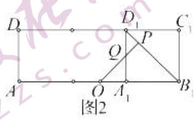


图2

对于D,如图3,取 $\overrightarrow{D_1H}=\frac{1}{3}\overrightarrow{D_1C_1}$,连接 HC,则 $HQ\parallel A_1C_1$,又 $AC\parallel A_1C_1$,所以 $HQ\parallel AC$,所以 A,M,C,H,Q 共面,即过 A,Q,M 三点的正四棱柱的截面为 $ACHQ$,由 $AQ=CH=\sqrt{4^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{10}}{3}$,则 $ACHQ$ 是等腰梯形,且 $QH=\frac{1}{3}A_1C_1=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,所以平面截正四棱柱所得截面的周长为 $\frac{8(\sqrt{2}+\sqrt{10})}{3}$,所以D正确. 故选 ACD.

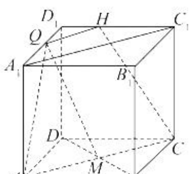


图3

12. ABD　对于A,令 $x=y=0$,代入已知等式得 $f(0)=f(0)g(0)-g(0)f(0)=0$,得 $f(0)=0$,再令 $y=0$,$x=1$,代入已知等式得 $f(1)=f(1)g(0)-g(1)f(0)$,可得 $f(1)[1-g(0)]=-g(1)f(0)=0$,结合 $f(1)\neq 0$ 得 $1-g(0)=0$,$g(0)=1$,故A正确;对于B,再令 $x=0$,代入已知等式得 $f(-y)=f(0)g(y)-g(0)f(y)$,将 $f(0)=0$,$g(0)=1$ 代入上式,得 $f(-y)=-f(y)$,∴函数 $f(x)$ 为奇函数,∴函数 $f(2x-1)$ 关于点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$ 对称,故B正确. 对于C,再令 $x=1$,$y=-1$ 代入已知等式,得 $f(2)=f(1)g(-1)-g(1)f(-1)$ ∵ $f(-1)=-f(1)$,∴ $f(2)=f(1)[g(-1)+g(1)]$,又∵ $f(2)=-f(-2)=-f(1)$,∴ $-f(1)=f(1)[g(-1)+g(1)]$,即 $f(1)[g(-1)+g(1)+1]=0$,∵ $f(1)\neq 0$,∴ $g(-1)+g(1)+1=0$ 得 $g(1)+g(-1)=-1$,故C

错误：对于D，再分别令 $y=-1$ 和 $y=1$ 代入已知等式，得以下两个等式 $f(x+1)=f(x)g(-1)-g(x)f(-1)$，$f(x-1)=f(x)g(1)-g(x)f(1)$，两式相加易得 $f(x+1)+f(x-1)=-f(x)$，所以有 $f(x+2)+f(x)=-f(x+1)$，从而有 $f(x-1)=f(x+2)$，∴$f(x)$为周期函数，且周期为3，∵$f(1)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，∴$f(-2)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$f(2)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，∴$f(3)=f(0)=0$，∴$\sum\limits_{n=1}^{2023}f(n)=\frac{\sqrt{3}}{2}$．故D正确．故选ABD.

13．93　$10\times75\%=7.5$，所以从小到大选取第8个数作为第75百分位数，即93.

14．-495　由二项式展开式的定义易知 xy^3 的系数为 $C_{11}^{8}(-C_3^1)=-495$.

15．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　因为 $\cos(2\alpha-\beta)=\cos\left[2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\left(\beta+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{2}\right]=\sin\left[2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\left(\beta+\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$=\sin[2(\alpha+\frac{\pi}{3})]\cos(\beta+\frac{\pi}{6})-\cos 2(\alpha+\frac{\pi}{3})\sin(\beta+\frac{\pi}{6})$.

$$\sin\left[2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\right]=2\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})=\frac{2\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})}{\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{3})+\cos^2(\alpha+\frac{\pi}{3})}=\frac{2\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}{\tan^2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+1}=\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\cos\left[2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\right]=\cos^2(\alpha+\frac{\pi}{3})-\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{3})=\frac{\cos^2(\alpha+\frac{\pi}{3})-\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{3})}{\cos^2(\alpha+\frac{\pi}{3})+\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{3})}=\frac{1-\tan^2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}{\tan^2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+1}=\frac{1}{3};$$

因为 $\cos\left(\beta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\beta\in(0,\pi)$，所以 $\left(\beta+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin\left(\beta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故 $\cos(2\alpha-\beta)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

16．$-\mathrm{e}$　由题意得 $x^{a+1}\cdot\mathrm{e}^x+a\ln x\geqslant0$ 化简得 $x\mathrm{e}^x\geqslant\frac{-a\ln x}{x^a}=\frac{1}{x^a}\ln\frac{1}{x^a}=\mathrm{e}^{\ln\frac{1}{x^a}}\ln\frac{1}{x^a}$ 易知函数 $y=x\mathrm{e}^x$ 是单调递增的函数，所以 $x\geqslant\ln\frac{1}{x^a}$ 对 $x>1$ 恒成立，此时 $a\geqslant\left(-\frac{x}{\ln x}\right)_{\max}$，令 $f(x)=-\frac{x}{\ln x}$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{(\ln x)^2}$，当 $x\in(0,\mathrm{e})$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，当 $x=\mathrm{e}$ 时，$f(x)_{\max}=f(\mathrm{e})=-\mathrm{e}$，即 a 的最小值为 $-\mathrm{e}$.

17．(1)证明：由 $a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+3}$，可得 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+3}{a_n}=2+\frac{3}{a_n}$，

$\frac{1}{a_{n+1}}+1=\frac{3}{a_n}+3=3\left(\frac{1}{a_n}+1\right)$，又 $\frac{1}{a_1}+1=3\neq0$，…………………………………… 3分

故数列 $\left\{\frac{1}{a_n}+1\right\}$ 是以3为首项，3为公比的等比数列．…………………………………… 4分

(2)解：由(1)可知 $\frac{1}{a_n}+1=3\times3^{n-1}=3^n$，故 $\frac{1}{a_n}=3^n-1$．…………………………………… 5分

$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}=3-1+3^2-1+3^3-1+\cdots+3^n-1=\frac{3(1-3^n)}{1-3}-n=\frac{3^{n+1}}{2}-\frac{3}{2}-n$．…………… 6分

令 $f(n)=\frac{3^{n+1}}{2}-\frac{3}{2}-n$，$(n\in\mathbf{N}^*)$

$f(n+1)-f(n)=\frac{3^{n+2}}{2}-\frac{3}{2}-(n+1)-\left(\frac{3^{n+1}}{2}-\frac{3}{2}-n\right)=3^{n+1}-1>0$ 易知 $f(n)$随 n 的增大而增大．……

…………………………………………………………………………………… 8分

$f(4)=116<121$，$f(5)=358>121$，故满足 $f(n)<121$ 的最大整数 n 为4．……………………………… 10分

18. 解:(1)由题意得 $\overline{x}=\frac{3+4+5+6}{4}=4.5$,$\overline{y}=\frac{0.1+0.2+0.4+0.5}{4}=0.3$. ………………………………… 2 分

$\sum\limits_{i=1}^{4}x_iy_i=6.1$,$\sum\limits_{i=1}^{4}x_i^2=86$,$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{4}x_iy_i-4\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{4}x_i^2-4\overline{x}^2}=\frac{6.1-4\times4.5\times0.3}{86-81}=0.14$. ………………… 3 分

所以 $\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=0.3-0.14\times4.5=-0.33$

故得 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=0.14x-0.33$. ………………………………………………………………… 4 分

(2)(ⅰ)将 $x=7$ 代入 $\hat{y}=0.14x-0.33$,得 $\hat{y}=0.14\times7-0.33=0.65$,

所以估计该市政府需要给 E 大学毕业生选择自主创业的人员发放补贴金总额为 $0.65\times1\,000\times1=650$(万元). …… 6 分

(ⅱ)设小明、小红两人中选择自主创业的人数为 X,则 X 的所有可能值为 0,1,2. ………………… 7 分

$P(X=0)=(1-p)(2-2p)=2p^2-4p+2$,

$P(X=1)=(1-p)(2p-1)+p(2-2p)=-4p^2+5p-1$,

$P(X=2)=p(2p-1)=2p^2-p$. ……………………………………………………………………………… 10 分

$\therefore E(X)=0\times(2p^2-4p+2)+(-4p^2+5p-1)\times1+(2p^2-p)\times2=3p-1$. ………………………… 11 分

$\because 3p-1\leqslant1.4$,$\frac{1}{2}<p<1$,$\therefore \frac{1}{2}<p\leqslant\frac{4}{5}$,故 p 的取值范围为 $\left(\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right]$. ………………………… 12 分

19. 解:(1)存在,当 B_1C 为圆柱 OO_1 的母线,$BC\perp AB_1$. ………………………………………………… 2 分

连接 BC,AC,B_1C,因为 B_1C 为圆柱 OO_1 的母线,所以 $B_1C\perp$ 平面 ABC,

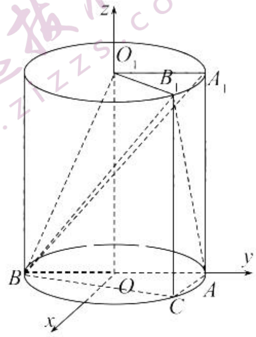
又因为 $BC\subset$ 平面 ABC,所以 $B_1C\perp BC$.

因为 AB 为圆 O 的直径,所以 $BC\perp AC$.

$BC\perp AC$,$B_1C\perp BC$,$AC\cap B_1C=C$,所以 $BC\perp$ 平面 AB_1C.

因为 $AB_1\subset$ 平面 AB_1C,所以 $BC\perp AB_1$. ……………………………………………………………… 6 分

(2)以 O 为原点,OA,OO_1 分别为 y,z 轴,垂直于 y,z 轴直线为 x 轴建立空间直角坐标系,如图所示.



$A_1(0,1,2)$,$O_1(0,0,2)$,$B(0,-1,0)$,

因为 $\overset{\frown}{A_1B_1}$ 的长为 $\frac{\pi}{6}$,所以 $\angle A_1O_1B_1=\frac{\pi}{6}$,$B_1\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},2\right)$,$\overrightarrow{O_1B}=(0,-1,-2)$,

$\overrightarrow{O_1B_1}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$.

设平面 O_1B_1B 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

$\begin{cases}-y-2z=0,\\ \frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y=0,\end{cases}$ 令 $x=-3$,解得 $y=\sqrt{3}$,$z=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $\boldsymbol{m}=\left(-3,\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. ………………………… 8 分

因为 x 轴垂直平面 A_1O_1B,所以设平面 A_1O_1B 的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,0,0)$. ……………………………… 9 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{-3}{\sqrt{9+3+\frac{3}{4}}}=-\frac{2\sqrt{51}}{17}$. ……………………………………………………………… 10 分

所以平面 A_1O_1B 与平面 B_1O_1B 夹角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{51}}{17}$. …………………………………………… 12 分

20. (1)证明:$\because DB$ 平分 $\angle ADC$,$\therefore\angle ADB=\angle CDB$,则 $\cos\angle ADB=\cos\angle CDB$.

由余弦定理得$\frac{AD^2+BD^2-AB^2}{2AD\cdot BD}=\frac{CD^2+BD^2-BC^2}{2CD\cdot BD}$，

即$\frac{12+BD^2-4}{4\sqrt{3}BD}=\frac{4+BD^2-4}{4BD}$，解得$BD^2=4(\sqrt{3}+1)$； …………………… 2分

$\because\cos A=\frac{AD^2+AB^2-BD^2}{2AD\cdot AB}=\frac{12+4-4(\sqrt{3}+1)}{8\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$，

$\cos C=\frac{CD^2+BC^2-BD^2}{2CD\cdot BC}=\frac{4+4-4(\sqrt{3}+1)}{8}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore\cos A=-\cos C$，又$A\in(0,\pi)$，$C\in(0,\pi)$，$\therefore A+C=\pi$. …………………… 6分

（注：此问若用正弦定理处理也给6分）

(2)解：$\because BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos A=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos C$，

$\therefore 16-8\sqrt{3}\cos A=8-8\cos C$，整理可得$\cos C=\sqrt{3}\cos A-1$； …………………… 8分

$S_1^2+S_2^2=\left(\frac{1}{2}AD\cdot AB\sin A\right)^2+\left(\frac{1}{2}BC\cdot CD\sin C\right)^2=12\sin^2A+4\sin^2C=12-12\cos^2A+4-4\cos^2C=16-$

$12\cos^2A-4(\sqrt{3}\cos A-1)^2=-24\cos^2A+8\sqrt{3}\cos A+12=-24\left(\cos A-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2+14$，

$\because A\in(0,\pi)$，$\therefore$当$\cos A=\frac{\sqrt{3}}{6}$时，$S_1^2+S_2^2$取得最大值，最大值为14. …………………… 12分

21. 解：(1)依题可得$\begin{cases}c=\sqrt{3},\\ \frac{3}{a^2}+\frac{1}{4b^2}=1,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\ b=1,\\ c=\sqrt{3},\end{cases}$ …………………… 2分

所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. …………………… 3分

(2)易知直线AP与AQ的斜率同号，所以直线PQ不垂直于x轴，

故可设PQ：$y=kx+m$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

由$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1,\\ y=kx+m\end{cases}$可得，$(1+4k^2)x^2+8mkx+4m^2-4=0$，

所以$x_1+x_2=\frac{-8mk}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4m^2-4}{1+4k^2}$，$\Delta=16(4k^2+1-m^2)>0$，即$4k^2+1>m^2$， …………………… 5分

而$k_{AP}k_{AQ}=\frac{1}{20}$，即$\frac{y_1}{x_1-2}\cdot\frac{y_2}{x_2-2}=\frac{1}{20}$，

化简可得$20(kx_1+m)(kx_2+m)=(x_1-2)(x_2-2)$，

$20k^2x_1x_2+20km(x_1+x_2)+20m^2=x_1x_2-2(x_1+x_2)+4$，

$20k^2\cdot\frac{4m^2-4}{1+4k^2}+20km\cdot\frac{-8mk}{1+4k^2}+20m^2=\frac{4m^2-4}{1+4k^2}-2\times\frac{-8mk}{1+4k^2}+4$

化简得$6k^2+mk-m^2=0$，

所以$m=-2k$或$m=3k$，

所以直线PQ：$y=k(x-2)$或$y=k(x+3)$，

因为直线PQ不经过点A，

所以直线PQ经过定点$(-3,0)$. …………………… 8分

所以直线PQ的方程为$y=k(x+3)$，易知$k\neq0$，

设定点 $B(-3,0)$，$S_{\triangle APQ}=|S_{\triangle ABP}-S_{\triangle ABQ}|=\frac{1}{2}|AB||y_1-y_2|=\frac{5}{2}|k||x_1-x_2|$

$=\frac{5}{2}|k|\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\frac{5}{2}|k|\sqrt{\left(\frac{-8km}{1+4k^2}\right)^2-4\times\frac{4m^2-4}{1+4k^2}}$

$=\frac{5|k|}{2}\frac{\sqrt{16(4k^2+1-m^2)}}{1+4k^2}=\frac{10\sqrt{(1-5k^2)k^2}}{1+4k^2}$，

因为 $\Delta>0$，且 $m=3k$，

所以 $1-5k^2>0$，所以 $0<k^2<\frac{1}{5}$，……………………………………………………………… 10 分

设 $t=4k^2+1\in\left(1,\frac{9}{5}\right)$，

所以 $S_{\triangle APQ}=\frac{5}{2}\sqrt{\frac{-5t^2+14t-9}{t^2}}=\frac{5}{2}\sqrt{-9\left(\frac{1}{t}-\frac{7}{9}\right)^2+\frac{4}{9}}\leqslant\frac{5}{3}$，

当且仅当 $t=\frac{9}{7}$，即 $k^2=\frac{1}{14}$ 时取等号，即△APQ 面积的最大值为 $\frac{5}{3}$. ……………………………… 12 分

22. 证明：(1)由题意可得：$3x_0-e^{x_0}+1=0$，$e^{x_0}=3x_0+1$，

$f'(x)=3-e^x$，$f'(x_0)=3-e^{x_0}=3-3x_0-1=2-3x_0$，

可得曲线在点 P 处的切线为 $l:y=(2-3x_0)(x-x_0)$. ………………………………………………… 3 分

令 $g(x)=(2-3x_0)(x-x_0)-(3x-e^x+1)$，$g(x_0)=0$，

$g'(x)=2-3x_0-3+e^x=-1-3x_0+e^x$，$g'(x_0)=-3x_0+e^{x_0}-1=0$，可得函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，∴$g(x)\geqslant g(x_0)=0$，∴曲线 $y=f(x)$ 上的点都不在直线 l 的上方. …… 6 分

(2)由(1)可得 $f'(x)=3-e^x=0$，解得 $x=\ln 3$，$f(\ln 3)=3\ln 3-3+1=3\ln 3-2$，∴$0<m<3\ln 3-2$.

曲线在点 P 处的切线为 $l:y=(2-3x_0)(x-x_0)$，

∵$e^{x_0}=3x_0+1$，由零点的存在性定理知 $x_0\in(1,2)$，

同理可得曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线为 $y=2x$，

$y=m$ 与 $y=2x$，$y=(2-3x_0)(x-x_0)$ 的交点的横坐标分别为 x_3，x_4 则 $x_3=\frac{m}{2}$，$x_4=x_0+\frac{m}{2-3x_0}$，

∴$|x_2-x_1|<x_4-x_3=x_0+\frac{m}{2-3x_0}-\frac{m}{2}$. ……………………………………………………… 8 分

下面证明：$x_0+\frac{m}{2-3x_0}-\frac{m}{2}<2-\frac{3m}{4}$.

∵$2-\frac{m}{4}-x_0-\frac{m}{2-3x_0}=2-x_0-m\cdot\frac{3(2-x_0)}{4(2-3x_0)}=(2-x_0)\cdot\frac{12x_0+3m-8}{4(3x_0-2)}$，

∵$x_0\in(1,2)$，∴$2-x_0>0$，$3x_0-2>1$，且 $12x_0-8+3m>4+3m>0$，

∴$2-\frac{m}{4}-x_0-\frac{m}{2-3x_0}>0$，

∴$x_0+\frac{m}{2-3x_0}-\frac{m}{2}<2-\frac{3m}{4}$，∴$x_2-x_1<2-\frac{3}{4}m$. ……………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。