机密★启用前(全国卷理科数学)

华大新高考联盟2023年名校高考预测卷

理科数学参考答案和评分标准

一、选择题

1.【答案】B

【命题立意】本题考查集合的运算、一元二次不等式的解法、二次函数的值域,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意,$A=\{x\mid(3x-8)(x+1)<0\}=\left\{x\middle|-1<x<\frac{8}{3}\right\}$,$B=\{y\mid y=(x-2)^2+1\}=\{y\mid y\geqslant 1\}$,故$A\cap B=\left[1,\frac{8}{3}\right)$,故选B.

2.【答案】A

【命题立意】本题考查排列组合,考查数学运算、逻辑推理、数学建模的核心素养.

【解析】第一步,将9名同学平均分成3组,共有$\frac{C_9^3C_6^3C_3^3}{A_3^3}$种分法;第二步,含有甲的分组打扫1号包干区,其他两组分别负责2、3号包干区,共有A_2^2种分法;由分步乘法计数原理可知,所有分配方法共$\frac{C_9^3C_6^3C_3^3}{A_3^3}\cdot A_2^2=560$种,故选A.

3.【答案】C

【命题立意】本题考查复数的运算、复数的概念、充要条件的判定,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意,$\frac{3+m^2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\frac{(3+m^2\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}=\frac{6-m^2}{5}+\frac{3+2m^2}{5}\mathrm{i}$,$\left(\frac{1}{5}+\frac{\mathrm{i}}{5}\right)(3+4\mathrm{i})=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\mathrm{i}+\frac{3}{5}\mathrm{i}-\frac{4}{5}=-\frac{1}{5}+\frac{7}{5}\mathrm{i}$,故$\frac{3+m^2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}+m\left(\frac{1}{5}+\frac{\mathrm{i}}{5}\right)(3+4\mathrm{i})=\frac{6-m-m^2}{5}+\frac{3+2m^2+7m}{5}\mathrm{i}$,若该式为纯虚数,则$\begin{cases}6-m-m^2=0,\\3+2m^2+7m\neq 0,\end{cases}$解得$m=2$,故选C.

4.【答案】D

【命题立意】本题考查幂函数的图象与性质,考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】因为$|MP|=|NQ|$,且$0<\alpha<1$,$\beta>1$,故$\frac{1}{2^\alpha}-\frac{1}{2^\beta}=\frac{1}{4^\alpha}-\frac{1}{4^\beta}=\left(\frac{1}{2^\alpha}-\frac{1}{2^\beta}\right)\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{2^\beta}\right)$,故$\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{2^\beta}=1$,则$2^\alpha+2^\beta=2^{\alpha+\beta}$,故选D.

5.【答案】D

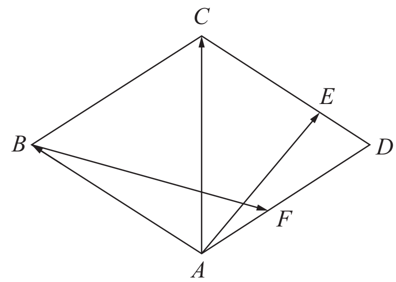
【命题立意】本题考查数列的递推公式、数列的周期性,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意,$a_nS_{n+1}-a_nS_n+2=2a_n$,则$a_{n+1}=2-\frac{2}{a_n}$,而$a_1=3$,故$a_2=\frac{4}{3}$,$a_3=\frac{1}{2}$,$a_4=-2$,$a_5=3$,…,故数列$\{a_n\}$的周期为4. 而$a_1+a_2+a_3+a_4=3+\frac{4}{3}+\frac{1}{2}+(-2)=\frac{17}{6}$,故$S_{2\,023}=505\times\frac{17}{6}+3+\frac{4}{3}+\frac{1}{2}=\frac{4\,307}{3}$,故选D.

6.【答案】A

【命题立意】本题考查平面向量的基本定理、平面向量的数量积,考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】作出图形如图所示，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=8$，故$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=-8$；而$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE})\cdot(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB})=\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}^2-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2-\frac{8}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{64}{9}$，故选 A.

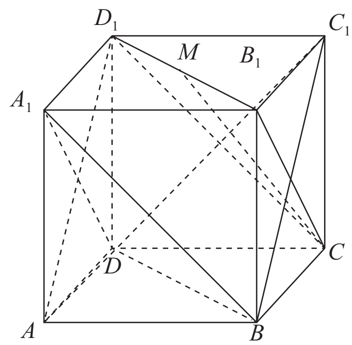


7.【答案】D

【命题立意】本题考查椭圆的方程与性质，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】依题意，得$\begin{cases}ab=21,\\ -\dfrac{b^2}{a^2}=-\dfrac{9}{49},\end{cases}$解得 $a=7,b=3$，则 $c=\sqrt{a^2-b^2}=2\sqrt{10}$，故 $7-2\sqrt{10}=a-c\leqslant|PF_1|\leqslant c+a=2\sqrt{10}+7$，故选 D.

8.【答案】C



【命题立意】本题考查空间线面的位置关系，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】因为平面 A_1BD∥平面 CB_1D_1，所以 CM∥平面 A_1BD，故①正确；因为 $AC_1\perp$平面 CB_1D_1，$CM\subset$平面 CB_1D_1，故 $CM\perp AC_1$，故②正确；当点 M 在端点 B_1 时，点 M 到平面 ABC_1D_1 的距离为最大值$\sqrt{2}$，故③错误. 故选 C.

9.【答案】D

【命题立意】本题考查双曲线的方程与性质，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】由双曲线的对称性可知，点 M,N 在双曲线 C 的右支上，且$\angle MPF_2=30°$；又$|F_2P|=|F_2M|=a+c$，故$\angle PF_2M=120°$. 连接 F_1M，则$|F_1M|-|F_2M|=2a$，故$|F_1M|=3a+c$，在$\triangle MF_1F_2$ 中，由余弦定理可得$|F_1M|^2=|F_1F_2|^2+|F_2M|^2-2|F_1F_2||F_2M|\cos 120°$，即$(3a+c)^2=(2c)^2+(a+c)^2-2\times 2c\times(a+c)\times\cos 120°$，整理得 $4a^2+ac-3c^2=0$，解得$\frac{c}{a}=\frac{4}{3}$，故$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{7}}{3}$，故双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{7}}{3}x$，故选 D.

10.【答案】C

【命题立意】本题考查指对数函数的图象与性质，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

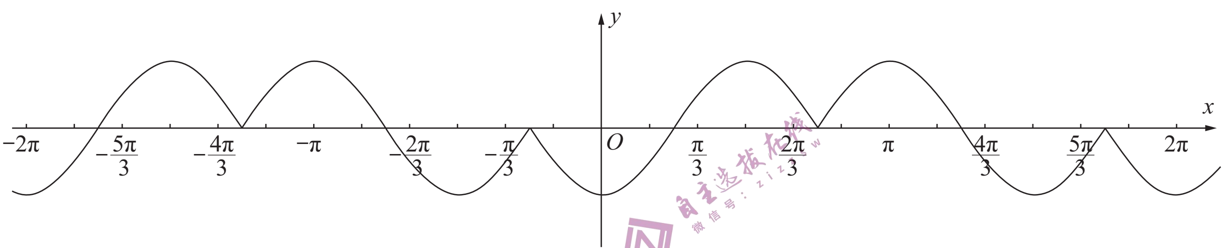
【解析】令 $m-x=\log_c(a^x+b^x)-\log_c c^x=\log_c\left[\left(\frac{a}{c}\right)^x+\left(\frac{b}{c}\right)^x\right]=f(x)$，因为 $y=\left(\frac{a}{c}\right)^x+\left(\frac{b}{c}\right)^x$ 在定义域上单调递减，$y=\log_c x$ 在定义域上单调递增，故 $f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减，故 $f(x)<f(1)=\log_c 1=0$，故 $m-x<0$，即 $m<x$；令 $n-x=\log_b(c^x-a^x)-\log_b b^x=\log_b\left[\left(\frac{c}{b}\right)^x-\left(\frac{a}{b}\right)^x\right]=g(x)$，因为 $y=\left(\frac{c}{b}\right)^x-\left(\frac{a}{b}\right)^x$ 在定义域上单调递增，$y=\log_b x$ 在定义域上单调递增，故 $g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，故 $g(x)>g(1)=\log_b 1=0$，故 $n-x>0$，即 $n>x$. 综上所述，若 $a,b,c\in(1,+\infty)$，则$\forall x\in(1,+\infty)$，都有 $1<m<x<n$，故①错误；同理可得，②正确；若 $x=1$，则$|m-x|=|n-x|=|m-n|=0$；若 $x>1$，由①的推论可知，$n>x>m>1$，则$|n-x|<|m-n|$，而 $c^m-b^x=c^x-b^n=a^x$，故$\frac{c^m-b^x}{b^m}>\frac{c^x-b^n}{b^x}$，则$\left(\frac{c}{b}\right)^m-b^{x-m}>\left(\frac{c}{b}\right)^x-b^{n-x}$，故 $b^{x-m}<b^{n-x}$，故 $0<x-m<n-x$，故$|m-x|<|n-x|<|m-n|$；若 $0<x<1$，同理可得，$|m-x|<|n-x|<|m-n|$；故若 $a,b,c\in(1,+\infty)$，则$\forall x\in(0,+\infty)$，都有$|m-x|\leqslant|n-x|\leqslant$

$|m-n|$，当且仅当 $x=1$ 时等号成立，则③正确；同理可得，④正确. 故选 C.

11.【答案】D

【命题立意】本题考查三角函数的图象与性质，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】依题意，$f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot|\sin x+\cos x|=\begin{cases}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x, -\frac{\pi}{4}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x, \frac{3\pi}{4}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{4}+2k\pi,\end{cases}$ $(k\in\mathbf{Z})$，作出函数 $f(x)$ 的大致图象如图所示，观察可知，A、B 正确；若 $f(x_1)+f(x_2)=-\sqrt{2}$，可以取 $x_1=0$，$x_2=\frac{3\pi}{2}$，故 C 正确；由于 $y=f(x)$ 与 $y=\frac{x}{4}$ 有 5 个交点，故函数 $g(x)=4f(x)-x$ 有 5 个零点，故 D 错误. 故选 D.



12.【答案】B

【命题立意】本题考查利用导数研究函数的性质，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】依题意，$\frac{e^{x-1}}{\lambda x}-x+\ln(\lambda x)=\frac{e^{x-1}}{e^{\ln(\lambda x)}}-x+\ln(\lambda x)=e^{x-\ln(\lambda x)-1}-[x-\ln(\lambda x)]=0$，令 $t=x-\ln(\lambda x)$，故问题转化为 $e^{t-1}-t=0$ 有解. 设 $h(t)=e^{t-1}-t$，则 $h'(t)=e^{t-1}-1$，故当 $t\in(-\infty,1)$ 时，$h'(t)<0$，当 $t\in(1,+\infty)$ 时，$h'(t)>0$，而 $h(1)=0$，所以 $h(t)$ 存在唯一零点 $t=1$，即 $1=x-\ln(\lambda x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有解，即 $1+\ln\lambda=x-\ln x$，令 $p(x)=x-\ln x$，则 $p'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，故当 $x\in(0,1)$ 时，$p'(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$p'(x)>0$，故函数 $p(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，故 $1+\ln\lambda\geqslant p(1)=1$，解得 $\lambda\geqslant1$，故实数 λ 的取值范围为 $[1,+\infty)$，故选 B.

二、填空题

13.【答案】3.

【命题立意】本题考查回归直线方程及其应用，考查数学运算、逻辑推理、数学建模的核心素养.

【解析】依题意，$z=\ln y=\ln(e^{-\frac{9}{10}}\cdot e^{\frac{7}{10}x})=\frac{7}{10}x-\frac{9}{10}$；而回归直线方程 $z=\frac{7}{10}x-\frac{9}{10}$ 过点 $\left(7,\frac{13+c}{4}\right)$，故 $\frac{13+c}{4}=\frac{7\times7}{10}-\frac{9}{10}$，解得 $c=3$.

14.【答案】$(-1,1)\cup(3,+\infty)$.

【命题立意】本题考查函数的图象与性质、一元二次不等式的解法，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】依题意，$x\neq1$，$f(x)=\frac{2^x}{4^x-4}+\frac{x}{x-1}$，故 $f(1+x)+f(1-x)=\frac{2^{x+1}}{4^{x+1}-4}+1+\frac{1}{x}+\frac{2^{1-x}}{4^{1-x}-4}+1-\frac{1}{x}=\frac{2^{x+1}}{4^{x+1}-4}+\frac{2^{x+1}}{4-4^{x+1}}+2=2$，故函数 $f(x)$ 的图象关于 $(1,1)$ 中心对称，而 $f(2x+3)>f(x^2)$，故 $2x+3<x^2<1$ 或 $x^2<1<2x+3$ 或 $1<2x+3<x^2$，解得 $-1<x<1$ 或 $x>3$，故所求不等式的解集为 $(-1,1)\cup(3,+\infty)$.

15.【答案】$\frac{4}{3}-\frac{1}{3\cdot 4^{n-1}}$.

【命题立意】本题考查等比数列的基本运算,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】当 $n=1$ 时,$a_1=\frac{S_1+1}{2}$,解得 $a_1=1$,当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=\frac{S_n+1}{2}$,$a_{n-1}=\frac{S_{n-1}+1}{2}$,两式相减可得$\frac{a_n}{a_{n-1}}=2$,故数列$\{a_n\}$是以 1 为首项、2 为公比的等比数列,故 $a_n=2^{n-1}$. 记 $T_n=b_1\cdot b_2\cdot b_3\cdot\cdots\cdot b_n=(2^{n-1}b_n)^n$,故当 $n\geqslant 2$ 时,$\frac{T_n}{T_{n-1}}=\frac{(2^{n-1}b_n)^n}{(2^{n-2}b_{n-1})^{n-1}}$,即 $b_n=\frac{2^{n(n-1)}(b_n)^n}{2^{(n-1)(n-2)}(b_{n-1})^{n-1}}$,故$\left(\frac{b_n}{b_{n-1}}\right)^{n-1}=\frac{2^{(n-1)(n-2)}}{2^{n(n-1)}}=\frac{1}{4^{n-1}}$,因为 $b_n>0$,故$\frac{b_n}{b_{n-1}}=\frac{1}{4}$,故数列$\{b_n\}$是以 1 为首项、$\frac{1}{4}$为公比的等比数列,故 $Q_n=\frac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}-\frac{1}{3\cdot 4^{n-1}}$.

16.【答案】$4\sqrt{3}-6$.

【命题立意】本题考查空间线面的位置关系,考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】依题意,$\alpha=\frac{\pi}{3}$,设点 E 到 BC 的距离为 h,则$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle BCE}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot AD\cdot AE\cdot\sin\angle DAE}{\frac{1}{2}BC\cdot h}=\frac{3\sin\angle DAE}{4\sin\alpha}$,即 $EA=h$,故点 E 的轨迹为以点 A 为焦点、BC 为准线的抛物线在$\triangle ABC$ 内的一段弧,故点 E 到 BC 的距离 h 的最大值为 $4\sqrt{3}-6$,故$(S_{\triangle BCE})_{\max}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot h_{\max}=4\sqrt{3}-6$.

三、解答题

17.【命题立意】本题考查正余弦定理、三角形的面积公式,考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】(1)依题意,有 $b\cdot\cos A=2a\cdot\cos B$,

由正弦定理,得 $\sin B\cdot\cos A=2\sin A\cdot\cos B$,则 $\tan B=2\tan A$, ……………………(1 分)

$\because\tan 2C=\frac{2\tan C}{1-\tan^2 C}=\frac{3}{4}$,$\therefore 3\tan^2 C+8\tan C-3=0$. ……………………(2 分)

$\because C$ 为钝角,$\therefore\tan C=-3\left(\tan C=\frac{1}{3}\text{舍去}\right)$, ……………………(3 分)

$\therefore\tan C=\tan[\pi-(A+B)]=-\tan(A+B)=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\cdot\tan B}=\frac{3\tan B}{\tan^2 B-2}=-3$, ……………(4 分)

解得 $\tan B=1$($\tan B=-2$ 舍去),即 $B=\frac{\pi}{4}$. ……………………(5 分)

(2)$\because\tan C=-3$,$\therefore\sin C=\frac{3\sqrt{10}}{10}$,$\cos C=-\frac{\sqrt{10}}{10}$. ……………………(6 分)

$\because A+B+C=\pi$,$\therefore A=\pi-(B+C)$,

$\therefore\sin A=\sin[\pi-(B+C)]=\sin(B+C)=\sin B\cdot\cos C+\cos B\cdot\sin C$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{5}}{5}$. ……………………(8 分)

由正弦定理,得$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,$a=\frac{c\cdot\sin A}{\sin C}$,$\therefore a=c\times\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{10}{3\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}}{3}c$, ……………………(9 分)

$\therefore\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{3}c\times c\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{c^2}{6}=6$,解得 $c=6$,$a=2\sqrt{2}$, ……………(11 分)

由正弦定理,得$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,$\therefore b=\frac{c\cdot\sin B}{\sin C}=6\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{10}{3\sqrt{10}}=2\sqrt{5}$,

$\therefore \triangle ABC$ 的周长为 $2\sqrt{2}+2\sqrt{5}+6$. …………………………………………………………（12 分）

18.【命题立意】本题考查空间线面的位置关系、向量法求空间角，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】(1)在$\triangle ABC$ 中，由余弦定理，

得 $BC^2=AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cdot\cos\angle CAB=AC^2$，则 $BC=AC$，…………………………（1 分）

而 $B_1C=3\sqrt{2}$，故 $CA=AA_1=3$，$AB=3\sqrt{2}$，

而 $BD=\sqrt{5}$，$AD=\sqrt{11}$，故 $\cos\angle ADB=\dfrac{5+11-18}{2\sqrt{55}}=-\dfrac{1}{\sqrt{55}}$，则 $\sin\angle ADB=\dfrac{3\sqrt{6}}{\sqrt{55}}$，

故 $S_{\triangle ADB}=\dfrac{1}{2}\cdot DA\cdot DB\cdot\sin\angle ADB=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{11}\times\sqrt{5}\times\dfrac{3\sqrt{6}}{\sqrt{55}}=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$. ……………………（3 分）

因为 $V_{A_1\text{-}ABD}=V_{D\text{-}A_1AB}$，所以 $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3\sqrt{6}}{2}\times h=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{9\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}$，解得 $h=\sqrt{6}$. ……………………（5 分）

(2)以点 C 为坐标原点，CA，CB，CC_1 所在的直线分别为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $C\text{-}xyz$，

不妨设 $CA=CC_1=3$，故 $A(3,0,0)$，$B(0,3,0)$，$B_1(0,3,3)$，$A_1(3,0,3)$，……………………（6 分）

设$\overrightarrow{CD}=\lambda\overrightarrow{CB_1}=(0,3\lambda,3\lambda)$，则 $D(0,3\lambda,3\lambda)$，则$\overrightarrow{AD}=(-3,3\lambda,3\lambda)$，$\overrightarrow{AB}=(-3,3,0)$，

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$为平面 ABD 的法向量，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\end{cases}$则$\begin{cases}-x+\lambda y+\lambda z=0,\\ x-y=0,\end{cases}$

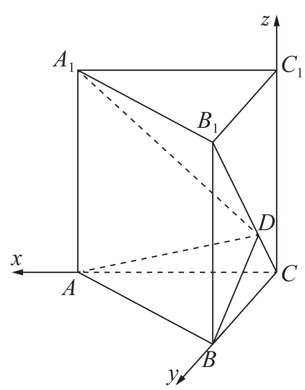
令 $x=\lambda$，则 $z=1-\lambda$，故 $\boldsymbol{n}=(\lambda,\lambda,1-\lambda)$为平面 ABD 的一个法向量，

…………………………………………………………（8 分）

而 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$为平面 ABC 的一个法向量， ……………………（9 分）

故$\dfrac{1}{3}=\dfrac{1-\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\lambda^2+(1-\lambda)^2}}$，解得 $3\lambda^2-8\lambda+4=0$，解得 $\lambda=\dfrac{2}{3}$($\lambda=2$ 舍去)，

…………………………………………………………（10 分）



故 $\boldsymbol{n}=\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$，$\overrightarrow{A_1D}=(-3,2,-1)$，

故直线 A_1D 与平面 ABD 所成角的正弦值 $\sin\theta=\dfrac{|\overrightarrow{A_1D}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{A_1D}|\,|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{14}}{14}$.

…………………………………………………………（12 分）

19.【命题立意】本题考查相互独立事件的概率、条件概率，考查数学运算、逻辑推理、数学建模的核心素养.

【解析】(1)“$S_k\leqslant 5$”表示储蓄罐中有 4 枚 1 元硬币或 3 枚 1 元硬币和 2 枚 5 角硬币，

故所求概率 $P=1-C_4^1\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^1\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^3-\left(\dfrac{2}{3}\right)^4=\dfrac{33}{81}$. ……………………（4 分）

(2)依题意，$S_5\geqslant 7$ 的概率为 $P=1-C_5^1\times\left(\dfrac{1}{3}\right)\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^4-\left(\dfrac{2}{3}\right)^5=\dfrac{131}{243}$. ……………………（6 分）

若有 2 次抽到 3 号卡，即 2 次放置 5 角硬币，3 次放置 1 元硬币，则在前 3 次中放了 2 次 1 元和 1 次 5 角，后 2 次放了 1 次 1 元和 1 次 5 角，即 2 次放 5 角，一次在前 3 次，另一次在后 2 次，

故其概率为 $C_3^1\times C_2^1\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{48}{243}$； ……………………（8 分）

若有 3 次抽到 3 号卡，即 3 次放置 5 角硬币，2 次放置 1 元硬币，必须在前 3 次放了 2 次 1 元和 1 次 5 角，后 2 次放了 2 次 5 角，即 2 次放 1 元都在前 3 次，故所求概率为 $C_3^2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{12}{243}$，其他情况不可能使得 $X_n=Y_n$， ……………………（10 分）

故 $P(X_n=Y_n)=\dfrac{\dfrac{48}{243}+\dfrac{12}{243}}{\dfrac{131}{243}}=\dfrac{60}{131}$. …………………………………………………………………………（12 分）

20.【命题立意】本题考查抛物线的方程、圆的方程、直线与抛物线的位置关系，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】(1)设圆 $C_1: x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

故$\begin{cases}9-3D+F=0,\\5-D+2E+F=0,\\1+D+F=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}D=2,\\E=0,\\F=-3,\end{cases}$ 故圆 $C_1: x^2+y^2+2x-3=0$， ……………………………（3 分）

将 $A\left(\dfrac{1}{4},1\right)$代入 $y^2=2px$ 中，解得 $p=2$，故抛物线 C_2 的方程为 $y^2=4x$. …………………………（4 分）

(2)设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，设切线 $l_{BP}: x-x_1=t_1(y-y_1)$，$l_{BQ}: x-x_2=t_2(y-y_2)$，

过抛物线 C_2 上点 $A\left(\dfrac{1}{4},1\right)$的切线方程为 $y=2x+\dfrac{1}{2}$，

即 $l_{PQ}: x=\dfrac{1}{2}y-\dfrac{1}{4}$，记 $t_0=\dfrac{1}{2}$. ①…………………………………………………………………………（5 分）

设过点 P 的直线 $x-x_1=t_1(y-y_1)$与抛物线 C_2 相切，代入抛物线方程 $y^2=4x$，

得 $y^2-4t_1y+4t_1y_1-4x_1=0$，

则 $\Delta=16t_1^2-16(t_1y_1-x_1)=0$，即 $t_1^2-y_1t_1+x_1=0$，所以$\dfrac{1}{2}t_1=x_1$，$\dfrac{1}{2}+t_1=y_1$， …………………（7 分）

$t_1=2x_1=y_1-\dfrac{1}{2}$，所以 $2y_1=4x_1+1$，②，同理可得 $t_2=2x_2$，

所以切线 $l_{BP}: x-x_1=2x_1(y-y_1)$，$l_{BQ}: x-x_2=2x_2(y-y_2)$，

联立两式消去 y，可得 $x_B=2x_1x_2\cdot\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=4x_1x_2$，③……………………………………………（9 分）

代入 l_{BP} 可得 $y_B=\dfrac{4x_2-1+2y_1}{2}$，④

代入②得 $y_B=2(x_1+x_2)$，

联立 $l_{PQ}: x=\dfrac{1}{2}y-\dfrac{1}{4}$与圆 C_1 可得，$5x^2+4x-\dfrac{11}{4}=0$，

所以 $x_1+x_2=-\dfrac{4}{5}$，$x_1x_2=-\dfrac{11}{20}$， ……………………………………………………………（11 分）

分别代入③、④可得 $x_B=-\dfrac{11}{5}$，$y_B=-\dfrac{8}{5}$，

$(x_B+1)^2+y_B^2=\left(-\dfrac{11}{5}+1\right)^2+\left(-\dfrac{8}{5}\right)^2=4$，即切线 BP，BQ 的交点 B 在圆 C_1 上，

所以 $B\left(-\dfrac{11}{5},-\dfrac{8}{5}\right)$. ………………………………………………………………………（12 分）

21.【命题立意】本题考查利用导数研究函数的性质，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】(1)令 $f(x)=0$，则 $a=\dfrac{e^x}{x^2}$，

令 $m(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$，则 $m'(x)=\dfrac{x^2e^x-2xe^x}{x^4}=\dfrac{(x-2)e^x}{x^3}$，………………………………………………（1 分）

故当 $x\in[1,2)$时，$m'(x)<0$，当 $x\in(2,3]$时，$m'(x)>0$，故函数 $m(x)$在$[1,2)$上单调递减，在$(2,3]$上

单调递增,而 $m(1)=e, m(3)=\frac{e^3}{9}, m(2)=\frac{e^2}{4}$, ………………………………………………………………（3 分）

故实数 a 的取值范围为 $\left(\frac{e^2}{4},\frac{e^3}{9}\right]$. ………………………………………………………………（4 分）

(2)依题意, $F(x)=f(x)+a\sin x-(1+a)x=e^x-ax^2+a\sin x-(1+a)x$,

当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时,若 $x\in(-\infty,0)$, $F'(x)=\frac{1}{e^{-x}}+a\cos x-2ax-1-a\leqslant\frac{1}{1-x}+a\cos x-2ax-1-a\leqslant$ $\frac{1}{1-x}+a-2ax-1-a=\frac{2ax\left[x-\left(1-\frac{1}{2a}\right)\right]}{1-x}$,当 $1-\frac{1}{2a}<x<0$ 时, $F'(x)<0$, $F(x)$ 单调递减,不合题意;

………………………………………………………………（6 分）

当 $a>\frac{1}{2}$ 时,若 $x\in(0,1)$,同理可得, $F'(x)\leqslant\frac{2ax\left[x-\left(1-\frac{1}{2a}\right)\right]}{1-x}$,当 $0<x<1-\frac{1}{2a}$ 时, $F'(x)<0$, $F(x)$ 单调递减,不合题意; ………………………………………………………………（7 分）

当 $a=\frac{1}{2}$ 时, $F(x)=e^x+\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x$, $F'(x)=e^x+\frac{1}{2}\cos x-x-\frac{3}{2}=g(x)$,

则 $g'(x)=e^x-\frac{1}{2}\sin x-1$. ………………………………………………………………（8 分）

①当 $x>0$ 时, $g'(x)\geqslant x+1-\frac{1}{2}\sin x-1\geqslant x-\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}x>0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,即 $F'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增; ………………………………（9 分）

②当 $x<0$ 时,若 $x\in[-1,0)$,则 $g'(x)=e^x-\frac{1}{2}\sin x-1\leqslant\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2}x-1=\frac{x(1+x)}{2(1-x)}\leqslant 0$,若 $x\in$ $(-\infty,-1]$, $g'(x)=e^x-\frac{1}{2}\sin x-1\leqslant\frac{1}{e}+\frac{1}{2}-1<0$,所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减,即 $f'(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减. ………………………………………………………………（11 分）

由①②可知, $F'(x)\geqslant F'(0)=0$,当 $a=\frac{1}{2}$ 时,函数 $F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. …………………………（12 分）

22.【命题立意】本题考查参数方程与极坐标方程的转化与应用,考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】(1)依题意,直线 l 的直角坐标方程为 $x=3$, ………………………………………………（1 分）

令 $\frac{t^2+2}{t}=3$,得 $t^2-3t+2=0$,解得 $t=1$ 或 $t=2$, ………………………………………………（2 分）

将 $t=1, t=2$ 代入 $y=\frac{3t^4-18}{5t}$ 中,得 $y=-3$ 或 $y=3$,故 $A(3,-3)$, $B(3,3)$. ……………………（4 分）

而 $P\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$,故 $P(1,\sqrt{3})$,故 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\times2\times6=6$. ………………………………………（5 分）

(2)由(1)可知 $OA\perp OB$,故 $\triangle OAB$ 的外接圆的圆心坐标为 $(3,0)$,半径为 3,

故圆的直角坐标方程为 $(x-3)^2+y^2=9$,即 $x^2+y^2-6x=0$, ………………………………………（7 分）

令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$,代入可得 $\rho=6\cos\theta$,

即 $\triangle OAB$ 的外接圆的极坐标方程为 $\rho=6\cos\theta$, ………………………………………………（8 分）

联立 $\begin{cases}\rho=6\cos\theta,\\ \rho=6\sin\theta,\end{cases}$ 解得 $\tan\theta=1$,故直线 MN 的极坐标方程为 $\theta=\frac{\pi}{4}(\rho\in\mathbf{R})$. …………………（10 分）

23.【命题立意】本题考查不等式的解法、绝对值三角不等式的性质、基本不等式，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，$-\frac{5}{3}$和1是方程$|ax+1|=4$的解，故$\begin{cases}\left|-\frac{5}{3}a+1\right|=4,\\|a+1|=4,\end{cases}$解得$a=3$. ……………（1分）

(1)$f(x)+|x+3|>6\Leftrightarrow|3x+1|+|x+3|>6$,

当$x<-3$时，$-3x-1-x-3>6$，解得$x<-\frac{5}{2}$，故$x<-3$；……………（2分）

当$-3\leqslant x\leqslant-\frac{1}{3}$时，$-3x-1+x+3>6$，解得$x<-2$，故$-3\leqslant x<-2$；……………（3分）

当$x>-\frac{1}{3}$时，$3x+1+x+3>6$，解得$x>\frac{1}{2}$，故$x>\frac{1}{2}$. ……………（4分）

综上所述，所求不等式的解集为$\left\{x\middle|x<-2\text{ 或 }x>\frac{1}{2}\right\}$. ……………（5分）

(2)依题意，$|3p+1|-|3p-2|\leqslant3^q+\lambda\cdot3^{-q}$对任意的$p,q$恒成立，

$|3p+1|-|3p-2|\leqslant|3p+1-3p+2|=3$，当且仅当$p\geqslant\frac{2}{3}$时等号成立，……………（7分）

则$3^q+\lambda\cdot3^{-q}\geqslant3$，故$\lambda\geqslant3^q(3-3^q)$.

而$3^q(3-3^q)\leqslant\frac{(3^q+3-3^q)^2}{4}=\frac{9}{4}$，当且仅当$3^q=\frac{3}{2}$，即$q=\log_3\frac{3}{2}$时等号成立，……………（9分）

故$\lambda\geqslant\frac{9}{4}$，即实数$\lambda$的取值范围为$\left[\frac{9}{4},+\infty\right)$. ……………（10分）