2023 年 3 月广西高三模拟考试
数学(理科)

考生注意：

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分，共 150 分. 考试时间 120 分钟.
2. 请将各题答案填写在答题卡上.
3. 本试卷主要考试内容：高考全部内容.

第Ⅰ卷

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|4x<1\}$，$B=\{x|-3<6x<8\}$，则 $A\cup B=$

A. $\{x|x<\frac{4}{3}\}$　　B. $\{x|-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{4}\}$

C. $\{x|x<\frac{1}{4}\}$　　D. $\{x|-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{4}\}$

2. 若复数 z 的虚部小于 0，且 $z^2=-1$，则 $\frac{z}{z+1}=$

A. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$　　B. $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

C. $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$　　D. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

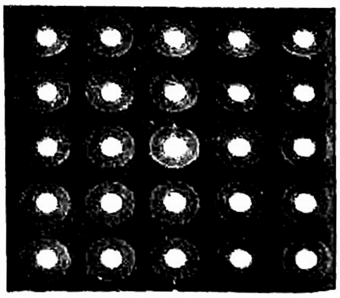
3. 若函数 $f(x)=a\sin x+1$ 的最大值为 4，则函数 $g(x)=\cos(ax+1)$ 的最小正周期为

A. 2π　　B. π　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

4. 若双曲线 $C:\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{2a}=1(a>0)$ 的焦距大于 6，C 上一点到两焦点的距离之差的绝对值为 d，则 d 的取值范围是

A. $(2\sqrt{3},+\infty)$　　B. $(\sqrt{3},+\infty)$　　C. $(6,+\infty)$　　D. $(3,+\infty)$

5. 某舞台灯光设备有一种 25 头 LED 矩阵灯(如图所示)，其中有 2 头 LED 灯出现故障，假设每头 LED 灯出现故障都是等可能的，则这 2 头故障 LED 灯相邻(横向相邻或纵向相邻)的概率为



A. $\frac{2}{15}$　　B. $\frac{7}{60}$

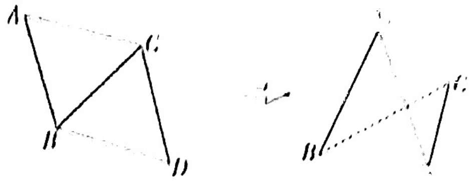
C. $\frac{1}{10}$　　D. $\frac{1}{15}$

6. 若 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 分别是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数、奇函数、偶函数，则下列函数不是偶函数的是

A. $y=f(g(x))h(x)$　　B. $y=f(g(x))+h(x)$

C. $y=f(h(x))g(x)$　　D. $y=f(x)|g(x)|h(x)$

7. 如图，$\triangle ABC$与$\triangle BCD$都是正三角形，$AB=2$，将$\triangle ABC$沿BC边折起，使得A到达A_1的位置，连接A_1D，得到三棱锥A_1-BCD，则"$\sqrt{6}<A_1D<2\sqrt{3}$"是"二面角A_1-BC-D为钝角"的



A. 充分不必要条件　　　　B. 充要条件

C. 必要不充分条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

8. 已知A,B,C是同一条直线上三个不同的点，O为直线外一点. 在正项等比数列$\{a_n\}$中，已知$a_1>2$，且$\overrightarrow{OA}=a_2\overrightarrow{OB}+a_3\overrightarrow{OC}$，则$\{a_n\}$的公比$q$的取值范围是

A. $(0,1+\sqrt{3})$　　B. $(1+\sqrt{3},+\infty)$　　C. $(0,1+\sqrt{2})$　　D. $(1+\sqrt{2},+\infty)$

9. 若x,y满足约束条件$\begin{cases}y-3\geqslant 0,\\ x-y-1\leqslant 0,\\ 2x+y-2\geqslant 0,\end{cases}$则$z=x-2y$的取值范围是

A. $[-2,1]$　　B. $[-1,2]$　　C. $(-\infty,-2]$　　D. $[-2,+\infty)$

10. 设钝角α满足$\dfrac{\cos 2\alpha-\sin\alpha}{1-2\sin\alpha}=\dfrac{8}{5}$，则$\tan(\alpha+\dfrac{3\pi}{4})=$

A. -7　　B. $-\dfrac{1}{7}$　　C. 7　　D. $\dfrac{1}{7}$

11. 在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为梯形，平面$PAD\perp$底面$ABCD$，$AB=CD=\sqrt{2}$，$BC=2$，$AD=4$，$PA=PD=2\sqrt{5}$，则四棱锥$P-ABCD$外接球的表面积为

A. 26π　　B. 27π　　C. 28π　　D. 29π

12. 若函数$f(x)=x^2e^x-\ln x$的最小值为m，则函数$g(x)=x^2e^{ex+2}-\ln x$的最小值为

A. $m-1$　　B. $em+1$　　C. $m+1$　　D. $em-1$

第Ⅱ卷

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分. 把答案填在答题卡的相应位置.

13. 若随机变量X的分布列为

X	-1	2	4	5
P	0.2	0.35	0.25	0.2

则X的数学期望为___▲___.

14. 南宋晚期的龙泉窑粉青釉刻花斗笠盏如图1所示，忽略杯盏的厚度，这只杯盏的轴截面如图2所示，其中光滑的曲线是抛物线的一部分，已知杯盏盛满茶水时茶水的深度为3 cm，则该抛物线的焦点到准线的距离为___▲___cm.

图1

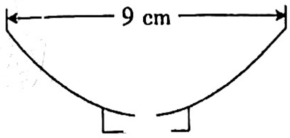


图2

15. 若不等式$ax^2>x^3-x-1$对$x\in(-\infty,0)$恒成立，则a的取值范围是___▲___.

16. 有穷数列$\{a_n\}$共有k项，满足$a_1=27$，$a_2=737$，且当$n\in\mathbf{N}^*$，$3\leqslant n\leqslant k$时，$a_n=a_{n-2}-\dfrac{n-1}{a_{n-1}}$，则项数$k$的最大值为___▲___.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一)必考题：共 60 分.

17.（12 分）

在$\triangle ABC$中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c. 已知$\dfrac{b^2+c^2-a^2}{\sin B}=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{\sin A}$.

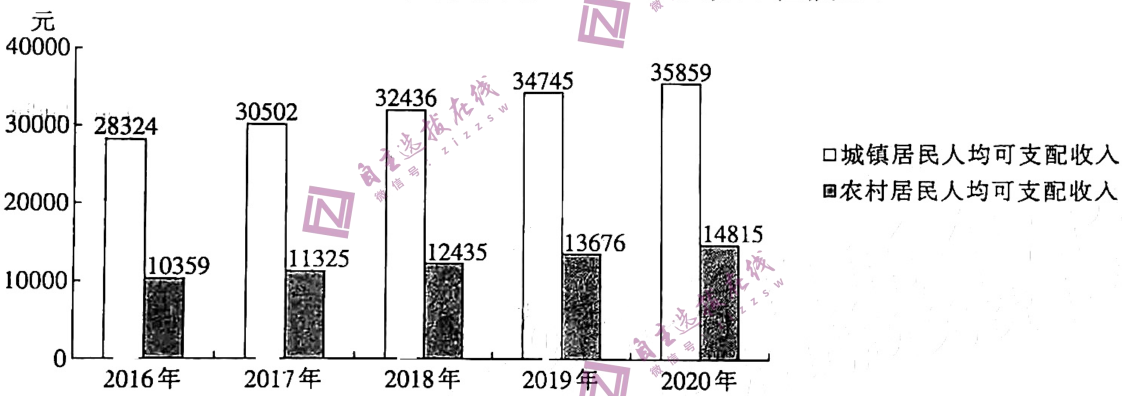
(1)证明：$A=B$.

(2)若 D 为 BC 的中点，从①$AD=4$，②$\cos C=\dfrac{1}{4}$，③$CD=2$ 这三个条件中选取两个作为条件证明另外一个成立.

注：若选择不同的组合分别解答，则按第一个解答计分.

18.（12 分）

2016～2020 年广西城乡居民人均可支配收入的柱形图如下图所示.



(1)不考虑价格因素，求广西 2020 年农村居民人均可支配收入的年增长率（结果精确到 0.1%）.

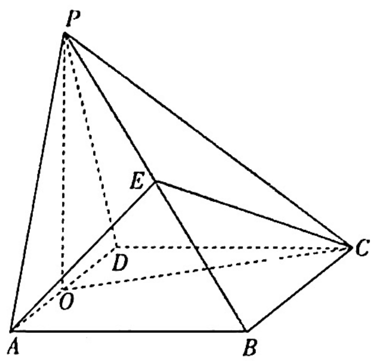
(2)现欲了解广西各年城镇居民人均可支配收入 y（单位：元）与农村居民人均可支配收入 x（单位：元）是否存在较好的线性关系. 设广西 2016 年城镇居民人均可支配收入为 y_1 元，农村居民人均可支配收入为 x_1 元，2017 年对应的数据分别为 y_2，x_2，2018 年对应的数据分别为 y_3，x_3，2019 年对应的数据分别为 y_4，x_4，2020 年对应的数据分别为 y_5，x_5. 根据图中的五组数据，得到 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=1.71x+m$，试问 y 关于 x 的线性相关系数 r 是否大于 0.95，并判断 y 与 x 之间是否存在较好的线性关系.

参考数据：$1.71\times\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-12522)^2\approx 21732390$，$\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2}\approx 6140$，$\sqrt{127090}\approx 356$.

附：样本的相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$，线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中的系数 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$.

19.(12分)

如图,四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为矩形,$AD=2,AB=3,PA=PD=\sqrt{10}$,平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$. O 是 AD 的中点,E 是 PB 上一点,且 $AE//$平面 POC.



(1)求$\dfrac{PE}{PB}$的值;

(2)求直线 CE 与平面 POC 所成角的正弦值.

20.(12分)

已知函数 $f(x)=ax^2+(a-2)x-x\ln x$.

(1)设 $a=0$.

①求曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程.

②试问 $f(x)$有极大值还是极小值?并求出该极值.

(2)若 $f(x)$在$(0,e)$上恰有两个零点,求 a 的取值范围.

21.(12分)

已知椭圆$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$,斜率为 2 的直线 l 与椭圆交于 A,B 两点.过点 B 作 AB 的垂线交椭圆于另一点 C,再过点 C 作斜率为-2的直线交椭圆于另一点 D.

(1)若坐标原点 O 到直线 l 的距离为$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,求$\triangle AOB$的面积.

(2)试问直线 AD 的斜率是否为定值?若是定值,求出此定值;若不是定值,说明理由.

(二)选考题:共 10 分.请考生在第 22、23 两题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一题计分.

22.[选修 4-4:坐标系与参数方程](10分)

在直角坐标系 xOy 中,曲线 C 的参数方程为$\begin{cases}x=2+\sqrt{5}\cos t,\\ y=2+\sqrt{5}\sin t\end{cases}$($t$ 为参数).以坐标原点 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴,建立极坐标系,直线 l_1 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta-3\rho\sin\theta-1=0$,直线 l_2 的极坐标方程为 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$.

(1)求 C 的极坐标方程;

(2)若直线 l_1 与 C 相交于 A,B 两点,P 为直线 l_2 上的动点,求$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的最小值.

23.[选修 4-5:不等式选讲](10分)

已知正数 a,b,c 满足 $a^2+b^2+2c^2=4$.

(1)若 $a+b+c=3$,证明:$\dfrac{1}{5}\leqslant c\leqslant 1$.

(2)若 $a=b$,求$\dfrac{b^4+c^4}{bc}+\dfrac{bc}{b^4+c^4}$的最小值.

密封线内不要答题