

## 高三数学考试参考答案

1. A 【解析】本题考查集合的运算,考查数学运算的核心素养.

因为  $A = \{x | 0 < x \leq 4\}$ ,  $B = \{x | x \geq 3\}$ , 所以  $A \cap B = \{x | 3 \leq x \leq 4\}$ .

2. C 【解析】本题考查复数的有关概念,考查数学运算的核心素养.

因为  $z = \frac{1-3i}{i} = -3-i$ , 所以  $z$  的实部是  $-3$ .

3. D 【解析】本题考查函数的性质,考查数学运算的核心素养.

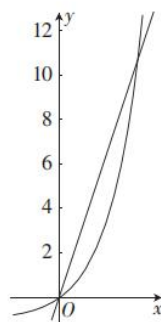
因为  $f(x) = x^2 + (a-2)x - 2a$ , 所以  $f(-x) = x^2 - (a-2)x - 2a$ , 由  $f(-x) = f(x)$ , 解得  $a = 2$ .

4. A 【解析】本题考查双曲线的性质,考查数学运算的核心素养.

因为  $\frac{b}{a} = 2$ , 所以  $b = 2a$ , 把点  $(\sqrt{3}, 2)$  的坐标代入方程  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4a^2} = 1$ , 得  $a^2 = 2$ , 所以  $b^2 = 8$ , 则  $C$  的标准方程为  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8} = 1$ . 无界学习公众号

5. B 【解析】本题考查函数的应用,考查直观想象的核心素养.

设当甲、乙再次相遇时,所用的时间为  $t$  小时,则  $2^t - 1 = 3t$ , 分别作出  $f(t) = 2^t - 1$ ,  $g(t) = 3t$  的大致图象,令  $F(t) = 2^t - 1 - 3t$ , 则  $F'(t) = 2^t \ln 2 - 3$  为增函数,  $F(t) = 2^t - 1 - 3t$  有唯一的极值点  $t_0 = \log_2 \frac{3}{\ln 2}$ , 则  $F(t) = 2^t - 1 - 3t$  在  $(0, t_0)$  上单调递减, 在  $(t_0, +\infty)$  上单调递增. 由于  $F(2) < 0$ ,  $F(3) < 0$ ,  $F(4) > 0$ , 所以  $t \in (3, 4)$ .



6. D 【解析】本题考查解三角形的知识,考查数学运算的核心素养.

因为  $b \cos A = a(\sqrt{3} - \cos B)$ , 所以  $\sin B \cos A = \sqrt{3} \sin A - \sin A \cos B$ ,

移项得  $\sin B \cos A + \sin A \cos B = \sqrt{3} \sin A$ , 即  $\sin C = \sqrt{3} \sin A$ , 所以  $c = \sqrt{3}a = 2\sqrt{3}$ .

7. C 【解析】本题考查抽象函数的求值,考查数学抽象的核心素养.

因为  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ , 所以  $f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$ , 即  $f(0) = 0$ .

所以  $f(\ln 2023) + f(\ln \frac{1}{2023}) = f(\ln 2023 - \ln 2023) = f(0) = 0$ .

8. B 【解析】本题考查数学文化与等比数列的求和,考查数学抽象与数学运算的核心素养.

由题意,若正整数  $m \leq 6^n$ , 且与  $6^n$  不互质, 则这个数为偶数或 3 的倍数, 共有  $\frac{2}{3} \times 6^n$  个, 所以

$\varphi(6^n) = \frac{1}{3} \times 6^n = 2 \times 6^{n-1}$ , 即数列  $\{\varphi(6^n)\}$  是首项为 2, 公比为 6 的等比数列, 所以  $S_{12} =$

$\frac{2(6^{12}-1)}{6-1} = \frac{2}{5}(6^{12}-1)$ .

9. AC 【解析】本题考查直线与圆的位置关系,考查数学运算的核心素养.

对于 A, 因为圆心  $C(1, 2)$  在直线  $y = kx + 1$  上, 所以  $2 = k + 1$ , 解得  $k = 1$ , A 正确;

对于B,因为直线 $l_2$ 恒过点 $(0,2)$ , $(0-1)^2+(2-2)^2 < 6$ ,即点 $(0,2)$ 在圆C内,所以 $l_2$ 与圆C相交,B错误;

对于C,因为 $l_1 \parallel l_2$ ,则 $m=k$ , $kx-y+1=0$ 与 $kx-y+2=0$ 之间的距离 $d = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ,所以 $k = \pm 2$ ,C正确;

对于D,因为圆心 $C(1,2)$ 到直线 $x+y-1=0$ 的距离 $d_2 = \frac{2}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2}$ ,所以 $|MN| = 2\sqrt{6-(\sqrt{2})^2} = 4$ ,D错误.

10. ABC 【解析】本题考查统计的知识,考查数据分析与数学运算的核心素养.

对于A,由 $1000 \times (1-18\%) = 820$ ,知30岁以上人群拥有汽车的人数为820,故A错误;

对于B,由图得不出40~45岁之间的人群拥有汽车的人数最多,故B错误;

对于C,55岁以上人群每年购买车险的总费用约为 $1000 \times 17\% \times 3100 = 527000$ 元,18~30岁之间的人群每年购买车险的总费用约为 $1000 \times 18\% \times 2800 = 504000$ 元,故C错误;

对于D,40~55岁之间的人群每年购买车险的总费用约为 $1000 \times 40\% \times 3900 = 1560000$ 元, $1560000 > 527000 + 504000$ ,故D正确. 无界学习公众号

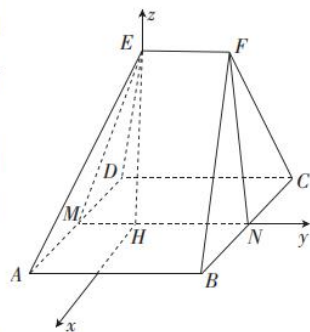
11. AC 【解析】本题考查几何体中线面垂直、夹角与距离,考查直观想象的核心素养.

对于A,因为 $EA=ED$ ,M是AD的中点,所以 $EM \perp AD$ .又因为底面ABCD是矩形,点N是BC的中点,所以 $MN \perp AD$ .因为 $MN \cap EM = M$ ,所以 $AD \perp$ 平面EFNM,所以A正确.

由A的结论知,平面 $ABCD \perp$ 平面EFNM,平面 $ABCD \cap$ 平面EFNM=MN,

因为 $EH \perp MN$ ,所以 $EH \perp$ 平面ABCD,建立如图所示的空间直角坐标系,

在 $Rt\triangle EMH$ 中, $MH=3$ , $EM=6$ , $\angle EMH = \frac{\pi}{3}$ , $EH = 3\sqrt{3}$ ,则 $M(0,-3,0)$ , $E(0,0,3\sqrt{3})$ , $B(3,9,0)$ , $F(0,6,3\sqrt{3})$ ,所以 $\vec{ME} = (0,3,3\sqrt{3})$ , $\vec{BF} = (-3,-3,3\sqrt{3})$ .设直线EM与BF所成角为 $\theta$ ,则 $\cos \theta = \left| \frac{\vec{ME} \cdot \vec{BF}}{|\vec{ME}| |\vec{BF}|} \right| = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ,所以B错误,C正确.



对于D, $\vec{HE} = (0,0,3\sqrt{3})$ , $\vec{EF} = (0,6,0)$ , $\vec{FB} = (3,3,-3\sqrt{3})$ ,设

平面ABEF的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$ ,所以 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \vec{EF} = 6y = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \vec{FB} = 3x + 3y - 3\sqrt{3}z = 0, \end{cases}$  令 $z = \sqrt{3}$ ,则 $\mathbf{n} = (3, 0, \sqrt{3})$ ,所以 $d = \left| \frac{\vec{HE} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \right| = \left| \frac{9}{2\sqrt{3}} \right| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ,所以D错误.

12. BC 【解析】本题考查抛物线的定义及性质,考查直观想象的核心素养.

由题意可知,过P所作圆的两条切线关于直线 $x=1$ 对称,所以 $k_{PA} + k_{PB} = 0$ .

设 $A(x_1, y_1)$ , $B(x_2, y_2)$ , $P(x_P, y_P)$ ,则 $k_{PA} = \frac{y_P - y_1}{x_P - x_1} = \frac{y_P - y_1}{\frac{y_P^2}{2p} - \frac{y_1^2}{2p}} = \frac{2p}{y_P + y_1}$ ,



同理可得  $k_{PB} = \frac{2p}{y_P + y_2}$ ,  $k_{AB} = \frac{2p}{y_1 + y_2}$ , 则  $\frac{2p}{y_P + y_1} + \frac{2p}{y_P + y_2} = 0$ , 得  $\frac{2p(y_1 + y_2 + 2y_P)}{(y_P + y_1)(y_P + y_2)} = 0$ , 所

以  $y_1 + y_2 = -2y_P$ , 由  $k_{AB} = \frac{2p}{y_1 + y_2} = \frac{2p}{-2y_P} = -1$ , 得  $y_P = p$ .

将  $(1, p)$  代入抛物线  $C$  的方程, 得  $p^2 = 2p$ , 解得  $p = 2$ , 故抛物线  $C$  的方程为  $y^2 = 4x$ , A 错误, B 正确.

设  $\angle MNF = \theta$ , 作  $MM'$  垂直准线于  $M'$  (图略), 由抛物线的性质可得  $|MM'| = |MF|$ ,

所以  $\frac{|MN|}{|MF|} = \frac{|MN|}{|MM'|} = \frac{1}{\cos \theta}$ , 当  $\cos \theta$  最小时,  $\frac{|MN|}{|MF|}$  的值最大,

所以当直线  $MN$  与抛物线  $C$  相切时,  $\theta$  最大, 即  $\cos \theta$  最小. 由题意可得  $N(-1, 0)$ ,

设切线  $MN$  的方程为  $x = my - 1$ , 联立方程组  $\begin{cases} x = my - 1, \\ y^2 = 4x, \end{cases}$  消去  $x$ , 得  $y^2 - 4my + 4 = 0$ , 由  $\Delta$

$= 16m^2 - 16 = 0$ , 可得  $m = \pm 1$ , 将  $m = \pm 1$  代入  $y^2 - 4my + 4 = 0$ , 可得  $y = \pm 2$ , 所以  $x = 1$ , 即

$M$  的坐标为  $(1, \pm 2)$ , 所以  $|MN| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ ,  $|MM'| = 1 - (-1) = 2$ , 所以  $\frac{|MN|}{|MF|}$  的最

大值为  $\frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ , C 正确, D 错误. 无界学习公众号

13.  $\frac{2\pi}{3}$  【解析】本题考查平面向量的夹角, 考查数学运算的核心素养.

因为  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + 4\mathbf{b}) = -1$ , 所以  $a^2 + 4\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -1$ , 解得  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -\frac{1}{2}$ . 设向量  $\mathbf{a}$  与向

量  $\mathbf{b}$  的夹角为  $\theta$ , 则  $\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = -\frac{1}{2}$ , 又  $0 \leq \theta \leq \pi$ , 所以  $\theta = \frac{2\pi}{3}$ .

14.  $-2; -\frac{18}{11}$  【解析】本题考查导数的几何意义, 考查数学运算的核心素养.

设切点坐标为  $(x_0, x_0^3 - x_0 + 2)$ , 因为  $y' = 3x^2 - 1$ , 所以  $3x_0^2 - 1 = \frac{x_0^3 - x_0 + 2 - 18}{x_0}$ , 即  $3x_0^3 - x_0$

$= x_0^3 - x_0 - 16$ , 解得  $x_0 = -2$ , 所以切线方程为  $y = 11x + 18$ , 可知该切线在  $x$  轴上的截距为

$-\frac{18}{11}$ .

15.  $36\pi$  【解析】本题考查三棱柱的外接球的表面积, 考查直观想象的核心素养.

由题设知  $AB, AC, AA_1$  两两垂直, 设直三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  外接球的半径为  $R$ , 则  $2R =$

$\sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = 6$ , 解得  $R = 3$ , 所以所求外接球的表面积  $S = 4\pi R^2 = 36\pi$ .

16. 180 【解析】本题考查排列组合的知识, 考查数学建模与数学运算的核心素养.

若  $A$  与其他一人参加同一个项目, 则有  $C_3^1 C_4^1 A_3^3 = 72$  种; 若  $A$  独自一人参加一个项目, 则有  $C_3^2 C_4^1 A_3^3 = 108$  种. 故共有  $72 + 108 = 180$  种不同的安排方案.

17. 解: (1) 设  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ , 因为  $S_5 = 45$ , 所以  $5a_3 = 45$ , 解得  $a_3 = 9$ . ..... 2 分  
又  $a_2 = 7$ , 所以  $d = a_3 - a_2 = 2$ , ..... 4 分  
所以  $a_n = 2n + 3$ . ..... 5 分

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

