名校联考联合体2021届高考仿真演练联合考试

数　学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求.

1. 已知 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x|x<0\}$，$B=\{-2,-1,0,1\}$，则 $(\complement_U A)\cap B=$

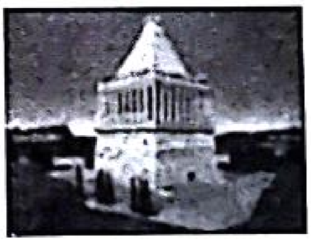
A. $\{1\}$　　B. $\{-2,-1\}$　　C. $\{0,1\}$　　D. $\varnothing$

2. 若直线 l 与平面 α 不平行，且直线 l 也不在平面 α 内，则

A. α 内不存在与 l 异面的直线　　B. α 内存在与 l 平行的直线

C. α 内存在唯一的直线与 l 相交　　D. α 内存在无数条与 l 垂直的直线

3. 摩索拉斯陵墓位于哈利卡纳素斯，在土耳其的西南方，陵墓由下至上分别是墩座墙、柱子构成的拱廊、四棱锥金字塔以及由四匹马拉着的一架古代战车的雕像，总高度 45 米，其中墩座墙和柱子围成长、宽、高分别是 40 米、30 米、32 米的长方体，长方体的上底面与四棱锥的底面重合，顶点在底面的射影是长方形对角线交点，最顶部的马车雕像高 6 米，则陵墓的高与金字塔的侧棱长之比大约为



(注：$\sqrt{674}\approx25.962$)

A. 2.77　　B. 2.43　　C. 1.73　　D. 1.55

4. 已知数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n,t$ 的平均数为 t，方差为 s_1^2，数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的方差为 s_2^2，则

A. $s_1^2>s_2^2$　　B. $s_1^2<s_2^2$

C. $s_1^2=s_2^2$　　D. s_1^2 与 s_2^2 的大小关系无法判断

5.《算法统宗》是中国古代数学名著，程大位著，共 17 卷，书中有这样一个问题："三百七十八里关，初行健步不为难，次日脚痛减一半，六朝才得到其关，要见次日行里数，请公仔细算相还." 大致意思是：有一个人要到距离出发地 378 里的地方，第一天健步行走，从第二天起因脚痛每天走的路程为前一天的一半，走了 6 天后到达目的地. 那么该人第 1 天所走路程里数为

A. 96　　B. 126　　C. 192　　D. 252

6. 已知函数 $f(x)=|\sin x|-|\cos x|$，则下列说法正确的是

A. $f(x)$ 的值域为 $[-1,1]$　　B. $f(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

C. $f(x)$ 的最小正周期为 2π　　D. $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 单调递增

7. 已知 P 是圆 $C: x^2+y^2-4x+6y+11=0$ 外一点，过 P 作圆 C 的两条切线，切点分别为 A，B，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最小值为

A. $4\sqrt{2}-6$　　B. $4-3\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $\sqrt{2}$

8. 抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，A、B 为抛物线上的两个动点，且满足 $\angle AFB=60^\circ$，过弦 AB 的中点 M 作抛物线准线的垂线 MN，垂足为 N，则 $\frac{|MN|}{|AB|}$ 的最大值为

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. 1　　D. 2

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 命题"$\exists x\in[1,2]$，$x^2\leqslant a$"为真命题的一个充分不必要条件是

A. $a\geqslant 1$　　B. $a\geqslant 4$　　C. $a\geqslant -2$　　D. $a=4$

10. 要得到函数 $y=\sin\left(-2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，只需将函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象

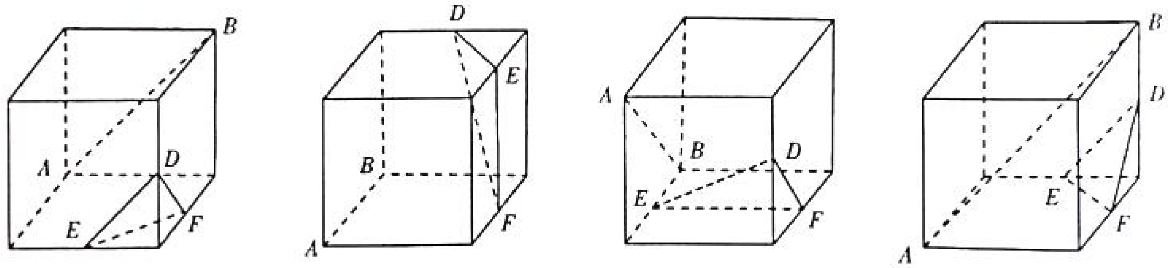
A. 作关于 y 轴对称图形即可　　B. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度即可

C. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度即可　　D. 向右平移 $\frac{5\pi}{6}$ 个单位长度即可

11. 已知双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm 2x$，则该双曲线的离心率为

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{5}$

12. 如图，在下列四个正方体中，A，B 为正方体的两个顶点，D，E，F 为所在棱的中点，则在这四个正方体中，直线 AB 与平面 DEF 平行的是



A　　B　　C　　D

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 设复数 z 的共轭复数为 $\bar{z}$，若复数 $z_1=\frac{-4+3i}{i}$，$z_2=t+i$，且 $z_1\cdot\overline{z_2}$ 为实数，则实数 t 的值为________.

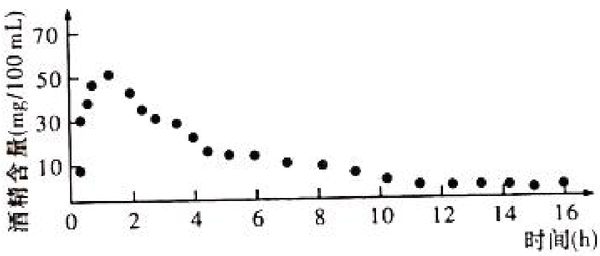
14. 若函数 $f(x)=-x^3+ax^2+4x$ 在区间 $(0,2)$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围为________.

15. 2019 年，公安部交通管理局下发《关于治理酒驾醉驾违法犯罪行为的指导意见》，对治理酒驾醉驾违法犯罪行为提出了新规定，根据国家质量监督检验检疫总局下发的标准，车辆驾驶人员饮酒后或者醉酒后驾车血液中的酒精含量阈值见下表. 经过反复试验，一般情况下，某人喝一瓶啤酒后酒精在人体血液中的变化规律的"散点图"见图.

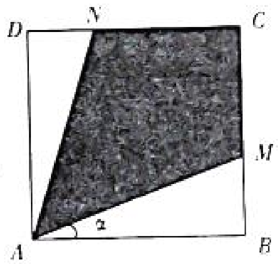
车辆驾驶人员血液酒精含量阈值

驾驶行为类别	阈值(mg/100 mL)
饮酒驾车	$[20,80)$
醉酒驾车	$[80,+\infty)$

且如下图所示的函数模型为 $f(x)=\begin{cases}40\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)+13,0\leqslant x<2,\\ 90\cdot e^{-0.5x}+14,x\geqslant 2.\end{cases}$ 假设该人喝一瓶啤酒后至少经过 $n(n\in \mathbf{N}^*)$ 小时才可以驾车，则 n 的值为________. (参考数据: $\ln 15\approx 2.71$, $\ln 30\approx 3.40$)



16. 如图，一块边长为 1 的正方形区域 $ABCD$，在 A 处有一个可转动的探照灯，其照射角 $\angle MAN$ 始终为 $\frac{\pi}{4}$，记探照灯照射在正方形 $ABCD$ 内部区域(阴影部分)的面积为 S. 若设 $\angle BAM=\alpha$，$\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，则 S 的最大值为________.



四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $b=1$，$c=2\sqrt{2}$.

(1) 若 $a\cos B=b\cos A$，此三角形是否存在？若存在，求此三角形的面积；若不存在，说明理由；

(2) 若 $a\cos C+b=0$，点 D 在 BC 边上，且 $\angle ADB=\frac{3\pi}{4}$，求 CD 长.

18. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$，其前 n 项和为 S_n，且 $a_1=2$.

(1) 若 $S_n=4a_{n-1}(n\geqslant 2)$，$b_n=a_{n+1}-2a_n(n\in \mathbf{N}^*)$，证明 $\{b_n\}$ 是等比数列，并求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

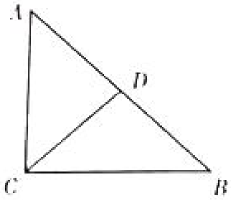
(2) 若 $S_n=\lambda na_n+\mu a_{n-1}$，其中 $n\geqslant 2$，$n\in \mathbf{N}^*$，$\lambda,\mu\in \mathbf{R}$，且数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，求 λ,μ 的值.

19. (本小题满分 12 分)

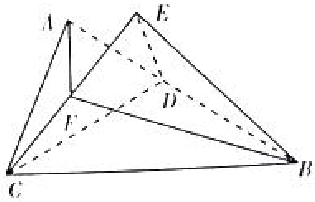
如图①，$\triangle ABC$ 中，$AC=BC$，$AC\perp BC$，D 为 AB 中点. 沿 CD 将 $\triangle ACD$ 折起，折起后的 A 点记为 E(如图②).

(1)求证：平面 $ECD\perp$ 平面 EBD；

(2)若 $\angle EDA=60^\circ$，线段 CE 上是否存在一点 F，使得二面角 $F-AB-C$ 的余弦值为 $\frac{4\sqrt{19}}{19}$？若存在，求出 $\frac{CF}{CE}$ 的值；若不存在，说明理由.



图①



图②

20.（本小题满分 12 分）

已知点 $F(2\sqrt{2},0)$ 为中心在原点的椭圆 C 的右焦点，且 $P\left(2,\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$ 在此椭圆上.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)若过点 $Q(-4\sqrt{2},0)$ 的直线交椭圆于 A，B 两点，点 A 关于 x 轴的对称点为点 C，求证：直线 BC 经过定点，并求出定点的坐标.

21.（本小题满分 12 分）

某医疗研究所新研发了一款医疗仪器，为保障该仪器的可靠性，研究所外聘了一批专家检测仪器的可靠性.已知每位专家评估过程相互独立.

(1)若安排两位专家进行评估，专家甲评定为"可靠"的概率为 $\frac{3}{4}$，专家乙评定为"可靠"的概率为 $\frac{4}{5}$，只有当两位专家均评定为"可靠"时，可以确定该仪器"可靠"，否则确定为"不可靠". 现随机抽取 4 台仪器，由两位专家进行评估，记评定结果为"不可靠"的仪器台数为 X，求 X 的分布列和数学期望；

(2)为进一步提高该医疗仪器的可靠性，研究所决定每台仪器都由三位专家进行评估，若每台仪器被每位专家评定为"可靠"的概率均为 $p(0<p<1)$，且每台仪器是否可靠相互独立. 只有三位专家都评定仪器可靠，则仪器通过评估. 若三位专家评定结果都为不可靠，则仪器报废. 其余情况，仪器需要回研究所返修，拟定每台仪器总评估费用为 100 元，若回研究所返修，每台仪器还需要额外花费 300 元的维修费. 现以此方案实施，且抽检仪器为 100 台，研究所用于评估和维修的预算是 3.3 万元，你认为该预算是否合理？并说明理由.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=xe^x$（其中 e 为自然对数的底数）.

(1)求函数 $f(x)$ 的最小值；

(2)求证：$f(x)>e^x+\ln x-\frac{1}{2}$.

名校联考联合体2021届高考仿真演练联合考试

数学参考答案

一、二、选择题

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答　案	C	D	C	B	C	A	A	C	BD	ACD	AD	AC

1. C 【解析】∵$A=\{x|x<0\}$，$B=\{-2,-1,0,1\}$，$U=\mathbf{R}$，
∴$\complement_U A=\{x|x\geqslant 0\}$，$(\complement_U A)\cap B=\{0,1\}$. 故选 C.

2. D 【解析】由直线 l 与平面 α 不平行，且直线 l 也不在平面 α 内，可得直线 l 与平面 α 相交，设交点为 O，则 α 内不过点 O 的直线都与直线 l 异面，故 A 错误；
若 α 内存在与 l 平行的直线，由直线与平面平行的判定，可得 $l//\alpha$，与已知矛盾，故 B 错误；
α 内所有过点 O 的直线都与直线 l 相交，故 C 错误；
若 $l\perp\alpha$，则 α 内的所有直线都与 l 垂直，若 l 与 α 不垂直，则 α 内所有与 l 在 α 内的射影垂直的直线都与 l 垂直，故 D 正确. 故选 D.

3. C 【解析】根据长、宽分别是 40 米、30 米得金字塔的底面长方形对角线长 50 米，
四棱锥的高为 $45-32-6=7$(米)，所以侧棱长为 $\sqrt{7^2+25^2}=\sqrt{674}$(米)，
所以陵墓的高与金字塔的侧棱长之比大约为 $\frac{45}{\sqrt{674}}=\frac{45}{25.962}\approx 1.73$. 故选 C.

4. B 【解析】由 $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n+t}{n+1}=t$，得 $x_1+x_2+\cdots+x_n+t=t(n+1)$，
∴$x_1+x_2+\cdots+x_n=tn$，∴$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=t$，故两组数据的平均数都是 t，
则 $s_1^2=\frac{1}{n+1}[(x_1-t)^2+(x_2-t)^2+\cdots+(x_n-t)^2+(t-t)^2]$，
$s_2^2=\frac{1}{n}[(x_1-t)^2+(x_2-t)^2+\cdots+(x_n-t)^2]$，
∵$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$，∴$s_1^2<s_2^2$，故选 B.

5. C 【解析】每天行走的路程构成以 $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列，其前 6 项和为 378，则 $S_6=\frac{a_1\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right]}{1-\frac{1}{2}}=378$，
解得 $a_1=192$，故选 C.

6. A 【解析】由于 $f(x+\pi)=|\sin(x+\pi)|-|\cos(x+\pi)|=|\sin x|-|\cos x|$，所以 $f(x)$ 的最小正周期不是 2π，故 C 错误；
关于函数 $f(x)$ 的值域，我们可以仅考虑一个周期即可. 当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$f(x)=\sin x-\cos x\in[-1,1]$，当 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 时，$f(x)=\sin x+\cos x\in[-1,1]$，所以 $f(x)$ 的值域为 $[-1,1]$，故 A 正确，B 错误；
当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 时，$f(x)=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，我们可得 $f(x)$ 在 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 时递增；当 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},0\right]$ 时，$f(x)=-\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)$，我们可得 $f(x)$ 在 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},0\right]$ 时递减，故 D 错误；
综上可得，本题答案为 A.

7. A 【解析】圆 C 的标准方程为 $(x-2)^2+(y+3)^2=2$，则圆 C 的半径为 $\sqrt{2}$，

设 $|PC|=d$，则 $|PA|=|PB|=\sqrt{d^2-2}$，

$\because \sin\angle APC=\dfrac{\sqrt{2}}{d}$，$\therefore \cos\angle APB=1-2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{d}\right)^2=1-\dfrac{4}{d^2}$，

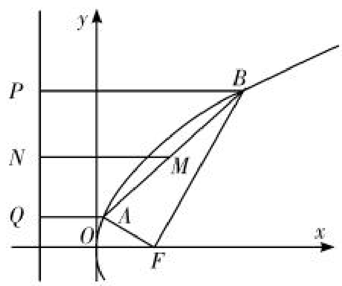
$\therefore \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(d^2-2)\left(1-\dfrac{4}{d^2}\right)=d^2+\dfrac{8}{d^2}-6\geqslant 2\sqrt{8}-6=4\sqrt{2}-6$，

当且仅当 $d^2=\dfrac{8}{d^2}$，即 $d^2=2\sqrt{2}>2$ 时，等号成立，

故 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最小值为 $4\sqrt{2}-6$.

故选 A.

8. C 【解析】设 $|AF|=a$，$|BF|=b$，过 A，B 点分别作准线的垂线 AQ，BP.



由抛物线定义，得 $|AF|=|AQ|$，$|BF|=|BP|$.

在梯形 $ABPQ$ 中，$2|MN|=|AQ|+|BP|=a+b$.

由余弦定理得，$|AB|^2=a^2+b^2-2ab\cos 60°=a^2+b^2-ab=(a+b)^2-3ab$，

又 $\because ab\leqslant\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$，

$\therefore (a+b)^2-3ab\geqslant(a+b)^2-\dfrac{3}{4}(a+b)^2=\dfrac{1}{4}(a+b)^2$，

得到 $|AB|\geqslant\dfrac{1}{2}(a+b)=|MN|$. $\therefore \dfrac{|MN|}{|AB|}\leqslant 1$，即 $\dfrac{|MN|}{|AB|}$ 的最大值为 1. 故选 C.

9. BD 【解析】命题"$\exists x\in[1,2]$，$x^2\leqslant a$"等价于 $a\geqslant 1$，故选 BD.

10. ACD

11. AD 【解析】双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm 2x$，

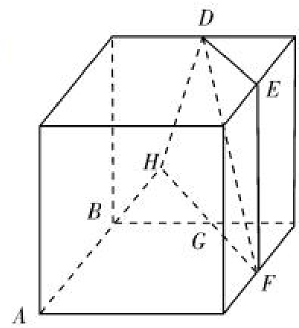
当焦点坐标在 x 轴时，$\dfrac{b}{a}=2$，所以 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{5}$；

当焦点坐标在 y 轴时，$\dfrac{a}{b}=2$，所以 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. 故选 AD.

12. AC 【解析】对于 A，$AB/\!/DE$，$AB\not\subset$ 平面 DEF，$DE\subset$ 平面 DEF，$\therefore$ 直线 AB 与平面 DEF 平行，故 A 正确；

对于 B，如图，取正方体所在棱的中点 G，连接 FG 并延长，交 AB 延长线于 H，

则 AB 与平面 DEF 相交于点 H，故 B 错误；



对于 C，$AB/\!/DF$，$AB\not\subset$ 平面 DEF，$DF\subset$ 平面 DEF，$\therefore$ 直线 AB 与平面 DEF 平行，故 C 正确；

对于 D，AB 与 DF 所在平面的正方形对角线有交点 B，DF 与该对角线平行，

$\therefore$ 直线 AB 与平面 DEF 相交，故 D 错误. 故选 AC.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\dfrac{3}{4}$ 【解析】因为 $z_1=\dfrac{-1+3i}{i}=3+i$，$z_2=t+i$，

所以 $z_1\cdot\overline{z_2}=(3+i)\cdot(t-i)=(3t+1)+(t-3)i$，令 $t-3=0$，解得 $t=\dfrac{3}{4}$.

14. $[2,+\infty)$ 【解析】$f(x)=-x^3+ax^2+4x$，则 $f'(x)=-3x^2+2ax+4$，

若 $f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 上单调递增，则 $-3x^2+2ax+4\geqslant 0$ 在 $(0,2)$ 恒成立，

即 $a\geqslant\dfrac{3x}{2}-\dfrac{2}{x}$ 在 $(0,2)$ 恒成立，

令 $g(x)=\dfrac{3x}{2}-\dfrac{2}{x}$，$x\in(0,2)$，则 $g'(x)=\dfrac{3}{2}+\dfrac{2}{x^2}>0$，$g(x)$ 在 $(0,2)$ 递增，

故 $g(x)<g(2)=2$，故 $a\geqslant 2$，故实数 a 的取值范围为 $[2,+\infty)$.

15. 6 【解析】由散点图可知，该人喝一瓶啤酒后的 2 个小时内，其酒精含量阈值大于 20，

所以 $\begin{cases} n\geqslant 2, \\ 90\cdot e^{-0.5n}+14<20, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} n\geqslant 2, \\ e^{-0.5n}<\dfrac{1}{15}, \end{cases}$ 解得 $n>2\ln 15\approx 2\times 2.71=5.42$，

因为 $n\in\mathbf{N}^*$，所以 n 的值为 6.

16. $2-\sqrt{2}$ 【解析】因为 $AB=1$，$\angle BAM=\alpha$，$\alpha\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$，所以 $BM=\tan\alpha$，

令 $\tan\alpha=t$，则 $0\leqslant t\leqslant 1$，而 $\angle DAN=\dfrac{\pi}{4}-\alpha$，所以 $DN=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{1-t}{1+t}$.

$S=S_{正方形ABCD}-S_{\triangle ABM}-S_{\triangle ADN}=1-\dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1-t}{1+t}=2-\dfrac{1}{2}\left[(t+1)+\dfrac{2}{t+1}\right]$

$\leqslant 2-\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{(t+1)\times\dfrac{2}{t+1}}=2-\sqrt{2}\,(0\leqslant t\leqslant 1)$. 当且仅当 $t=\sqrt{2}-1$ 时取等号，

所以 S 的最大值为 $2-\sqrt{2}$.

四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 【解析】(1) 由 $a\cos B=b\cos A$ 可得：$\sin A\cos B=\sin B\cos A$，

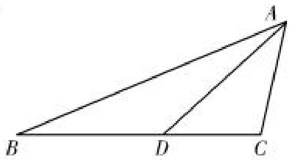
故 $\sin(A-B)=0$. $\therefore A=B$.

$\therefore a=b=1$，$a+b=2<2\sqrt{2}=c$.

故这样的三角形不存在. ………………………………………………………………………… 4 分

(2) 由 $a\cos C+b=0$ 得 $a\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+b=0$，

$\therefore a^2+3b^2-c^2=0$，将 $b=1$，$c=2\sqrt{2}$ 代入求得 $a=\sqrt{5}$， ………………………… 6 分



$\therefore \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1+8-5}{4\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore A=\dfrac{\pi}{4}$，

$\because \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{5+1-8}{2\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin C=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$， ………………………… 8 分

$\therefore \sin\angle DAC=\sin\left(\dfrac{3}{4}\pi-C\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos C+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin C=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. ………………………………… 9 分

在 $\triangle ACD$ 中，$\dfrac{CD}{\sin\angle DAC}=\dfrac{AC}{\sin\angle ADC}$，则 $CD=\dfrac{1\times\dfrac{\sqrt{10}}{10}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. ……………………………………… 10 分

18. 【解析】(1) 当 $S_n=4a_{n-1}(n\geqslant 2)$，则 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=4(a_n-a_{n-1})$，

即 $a_{n+1}-2a_n=2(a_n-2a_{n-1})$.

所以 $b_n=2b_{n-1}$， ……………………………………………………………………………………… 3 分

又由 $a_1=2$，$S_2=a_1+a_2=4a_1$，

得 $a_2=3a_1=6$，$a_2-2a_1=2\neq 0$，即 $b_n\neq 0$，

所以 $\dfrac{b_n}{b_{n-1}}=2$. 故数列 $\{b_n\}$ 是等比数列，且 $b_n=2^n$. ………………………………………………… 6 分

(2) 若 $\{a_n\}$ 是等比数列，设其公比为 $q(q\neq 0)$，

当 $n=2$ 时，$S_2=2\lambda a_2+\mu a_1$，即 $a_1+a_2=2\lambda a_2+\mu a_1$，

得 $1+q=2\lambda q+\mu$，① ……………………………………………………………………………… 7 分

当 $n=3$ 时，$S_3=3\lambda a_3+\mu a_2$，即 $a_1+a_2+a_3=3\lambda a_3+\mu a_2$，

得 $1+q+q^2=3\lambda q^2+\mu q$，② ……………………………………………………………………… 8 分

当 $n=4$ 时，$S_4=4\lambda a_4+\mu a_3$，即 $a_1+a_2+a_3+a_4=4\lambda a_4+\mu a_3$，

得 $1+q+q^2+q^3=4\lambda q^3+\mu q^2$，③ ……………………………………………………………… 9 分

②－①×q，得 $1=\lambda q^2$，

③－②×q，得 $1=\lambda q^3$，

解得 $q=1$，$\lambda=1$. …………………………………………………………………… 10 分

代入①式，得 $\mu=0$.

此时 $S_n=na_n(n\geqslant 2)$，

所以 $a_1=2$，$\{a_n\}$是公比为 1 的等比数列，

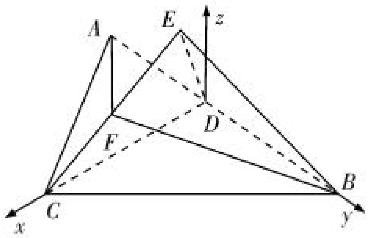
故 $\lambda=1$，$\mu=0$. …………………………………………………………………… 12 分

19.【解析】(1)证明：由已知可得：$CD\perp BD$，$CD\perp DE$，又 $DB\cap DE=D$，

∴$CD\perp$平面 EBD，而 $CD\subset$平面 ECD，

∴平面 $ECD\perp$平面 EBD. …………………………………………………………………… 4 分

(2)以 D 为原点，射线 DC，DB 为非负 x、y 轴建立空间直角坐标系(如图)，



若设 $AC=CD=a$，则可得：$D(0,0,0)$，$C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right)$，$B\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$，

又由 $ED=AD=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，$\angle EDA=60°$，可得 $E\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{4}a,\frac{\sqrt{6}}{4}a\right)$，

为了计算方便，取 $a=2\sqrt{2}$，于是 $D(0,0,0)$，$C(2,0,0)$，$B(0,2,0)$，

$E(0,-1,\sqrt{3})$，若线段 CE 上存在点 F 满足题意，设$\overrightarrow{CF}=\lambda\overrightarrow{CE}(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$.

由$\overrightarrow{CF}=\lambda\overrightarrow{CE}$，$\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{DC}=\lambda(\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DC})$，$\overrightarrow{DF}=(1-\lambda)\overrightarrow{DC}+\lambda\overrightarrow{DE}$，

故 $F(2-2\lambda,-\lambda,\sqrt{3}\lambda)$，

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$为平面 ABF 的法向量，则由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DF}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\end{cases}$

得$\begin{cases}(2-2\lambda)x-\lambda y+\sqrt{3}\lambda z=0,\\ y=0,\end{cases}$取 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3}\lambda,0,2\lambda-2)$， …………………………………… 8 分

显然 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$为平面 ABC 的法向量，

由已知 $|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|2\lambda-2|}{\sqrt{3\lambda^2+(2\lambda-2)^2}}=\frac{4}{19}\sqrt{19}$，

得 $3\lambda^2+2\lambda-1=0$，故 $\lambda=\frac{1}{3}$($\lambda=-1$ 舍去)，

∴线段 CE 上存在一点 F，且$\frac{CF}{CE}=\frac{1}{3}$时，满足题意. ……………………………………… 12 分

20.【解析】(1)由已知：$\begin{cases}a^2-b^2=8,\\ \frac{4}{a^2}+\frac{8}{3b^2}=1\end{cases}\Rightarrow 3a^4-44a^2+96=0$，

∴$a^2=12\left(a^2=\frac{8}{3}<8，不合题意，舍去\right)$，∴$b^2=4$，

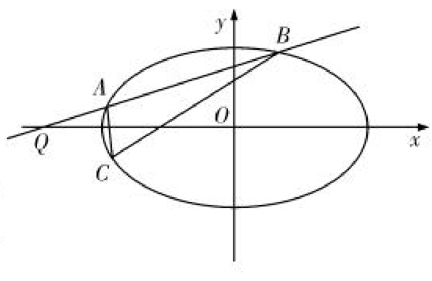
则椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$. ……………………………………………………………… 4 分

(2)设直线 BC 的方程为 $x=my+t$，

与椭圆方程联立得$(my+t)^2+3y^2=12$，

即$(m^2+3)y^2+2mty+t^2-12=0$，

设 $C(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，



则 $y_1+y_2=\frac{-2mt}{m^2+3}$，$y_1y_2=\frac{t^2-12}{m^2+3}$， …………………………… 6 分

由 $\Delta>0$ 可得 $t^2<4m^2+12$. …………………………………………………… 7 分

又 $Q(-4\sqrt{2},0)$，$A(x_1,-y_1)$，$B(x_2,y_2)$三点共线，

故$\frac{-y_1}{x_1+4\sqrt{2}}=\frac{y_2}{x_2+4\sqrt{2}}\Rightarrow y_1(x_2+4\sqrt{2})+y_2(x_1+4\sqrt{2})=0$，

$y_1(my_2+t+4\sqrt{2})+y_2(my_1+t+4\sqrt{2})=0$，

$2my_1y_2+(t+4\sqrt{2})(y_1+y_2)=0$，…………9 分

$\therefore 2m\cdot\frac{t^2-12}{m^2+3}-\frac{(t+4\sqrt{2})\cdot 2mt}{m^2+3}=0$，

$\therefore \sqrt{2}mt+3m=0$，又 $m\neq 0$，

$\therefore t=-\frac{3}{2}\sqrt{2}$，即 BC 恒过定点$\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2},0\right)$．…………12 分

21.【解析】(1)记事件 A：一台机器被评定为"不可靠"，则 $P(A)=1-\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$，…………2 分

由题意知 X 的所有可能取值为 0，1，2，3，4．

由题意得：$X\sim B\left(4,\frac{2}{5}\right)$，…………3 分

所以 $P(X=k)=C_4^k\left(\frac{2}{5}\right)^k\left(\frac{3}{5}\right)^{4-k}(k=0,1,2,3,4)$，

$P(X=0)=C_4^0\left(\frac{2}{5}\right)^0\times\left(\frac{3}{5}\right)^4=\frac{81}{625}$，

$P(X=1)=C_4^1\left(\frac{2}{5}\right)^1\times\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{216}{625}$，

$P(X=2)=C_4^2\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{216}{625}$，

$P(X=3)=C_4^3\left(\frac{2}{5}\right)^3\times\left(\frac{3}{5}\right)^1=\frac{96}{625}$，

$P(X=4)=C_4^4\left(\frac{2}{5}\right)^4\times\left(\frac{3}{5}\right)^0=\frac{16}{625}$．

故随机变量 X 的分布列为：

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{81}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{16}{625}$

所以 $E(X)=np=4\times\frac{2}{5}=\frac{8}{5}$．…………6 分

(2)该预算合理，理由如下：

设每台仪器用于评估和维修的费用为 Y 元．则 Y 的可能取值为 100，400，

则 $P(Y=100)=p^3+(1-p)^3$，$P(Y=400)=1-p^3-(1-p)^3$．

所以 $E(Y)=100[p^3+(1-p)^3]+400[1-p^3-(1-p)^3]$，

即 $E(Y)=400-300[p^3+(1-p)^3]$，

令 $f(p)=400-300[p^3+(1-p)^3]$，$p\in(0,1)$，

$f'(p)=-300[3p^2-3(1-p)^2]=-300(6p-3)$，

令 $f'(p)=-300(6p-3)=0$，解得 $p=\frac{1}{2}$，

当 $p\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$时，$f'(p)>0$，$f(p)$在 $p\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$单调递增，

当 $p\in\left(\frac{1}{2},1\right)$时，$f'(p)<0$，$f(p)$在 $p\in\left(\frac{1}{2},1\right)$单调递减，

所以当 $p=\frac{1}{2}$ 时，$f(p)$ 的最大值为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=325$， ………………………………………… 11 分

所以实施此方案，100 台仪器的评估和维修的费用期望值最高为 $100\times325=32500$ 元<33000 元，因此该预算合理. ………………………………………… 12 分

22.【解析】(1)因为 $f(x)=xe^x$，所以 $f'(x)=(x+1)e^x$，

当 $x<-1$ 时，$f'(x)=(x+1)e^x<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x>-1$ 时，$f'(x)=(x+1)e^x>0$，$f(x)$ 单调递增，

所以 $f(x)_{\min}=f(-1)=-\frac{1}{e}$. ………………………………………… 4 分

(2)证明：要证 $f(x)>e^x+\ln x-\frac{1}{2}$，

只需证明 $(x-1)e^x-\ln x+\frac{1}{2}>0$ 对于 $x>0$ 恒成立. ………………………………………… 6 分

令 $g(x)=(x-1)e^x-\ln x+\frac{1}{2}$，则 $g'(x)=xe^x-\frac{1}{x}(x>0)$，

当 $x>0$ 时，$g''(x)=(x+1)e^x+\frac{1}{x^2}>0$.

则 $g'(x)=xe^x-\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

又因为 $g'\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{2}=\frac{2}{3}\left[e^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right]<0$，$g'(1)=e-1>0$，

所以存在 $x_0\in\left(\frac{2}{3},1\right)$，使得 $g'(x_0)=0$，

由 $g'(x_0)=x_0e^{x_0}-\frac{1}{x_0}=\frac{x_0^2e^{x_0}-1}{x_0}=0$，

得 $x_0^2e^{x_0}=1$，即 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0^2}$，即 $-2\ln x_0=x_0$，

所以当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)=xe^x-\frac{1}{x}<0$，$g(x)$ 单调递减，

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g'(x)=xe^x-\frac{1}{x}>0$，$g(x)$ 单调递增， ………………………………………… 9 分

所以 $g(x)_{\min}=g(x_0)=(x_0-1)e^{x_0}-\ln x_0+\frac{1}{2}=\frac{x_0-1}{x_0^2}+\frac{x_0}{2}+\frac{1}{2}=\frac{x_0^3+x_0^2+2x_0-2}{2x_0^2}$，

令 $\varphi(x)=x^3+x^2+2x-2\left(\frac{2}{3}<x<1\right)$，

则 $\varphi'(x)=3x^2+2x+2=3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5}{3}>0$.

所以 $\varphi(x)$ 在 $\left(\frac{2}{3},1\right)$ 上单调递增，所以 $\varphi(x_0)>\varphi\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{27}>0$，

所以 $g(x)\geq g(x_0)=\frac{\varphi(x_0)}{2x_0^2}>0$，所以 $(x-1)e^x-\ln x+\frac{1}{2}>0$，

即 $f(x)>e^x+\ln x-\frac{1}{2}$. ………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 ‘’ 专业、专注、有态度 ‘’ 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。