

2021—2022 学年度第一学期期中质量检测

## 高三数学试题

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合  $M = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ,  $N = \{x | 2^x > 7\}$ , 则  $M \cap N =$  ( )

- A.  $\{7, 9\}$       B.  $\{5, 7, 9\}$       C.  $\{3, 5, 7, 9\}$       D.  $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

2. 在等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_3 + a_7 = 6$ , 则  $a_2 + a_8 =$  ( )

- A. 3      B. 4      C. 5      D. 6

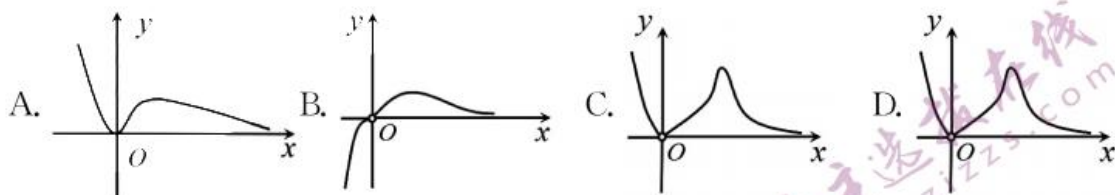
3. 已知  $a = \log_{0.2} 3$ ,  $b = 2^{0.3}$ ,  $c = 0.3^{0.2}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系为 ( )

- A.  $a < b < c$       B.  $b < c < a$       C.  $a < c < b$       D.  $b < a < c$

4. 若  $\tan \theta = 2$ , 则  $\sin 2\theta =$  ( )

- A.  $\frac{4}{5}$       B.  $-\frac{4}{5}$       C.  $\frac{3}{5}$       D.  $-\frac{3}{5}$

5. 函数  $f(x) = \frac{x^5}{3^x - 1}$  的图象大致是 ( )



6. 设  $2^a = 3^b = m$ , 且  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2$ , 则  $m =$  ( )

- A.  $\sqrt{10}$       B.  $\sqrt{6}$       C. 10      D. 6

7. 已知函数  $f(x) = a \sin 3x + bx^3 + 3$  ( $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ ),  $f'(x)$  为  $f(x)$  的导函数, 则  $f(2021) + f(-2021) + f'(2022) - f'(-2022) =$  ( )

- A. 0      B. 2021      C. 2022      D. 6

8. 已知函数  $f(x) = |x| + \frac{a}{x} - 2$ , 若函数  $y = f(x-a)$  有三个不同的零点, 则实数  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $(-1, 0) \cup (0, 1)$       B.  $(-3, 0) \cup (0, 3)$   
C.  $(-3\sqrt{2}, 0) \cup (0, 3\sqrt{2})$       D.  $(-6, 0) \cup (0, 6)$

高三数学试题 第 1 页 共 4 页

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 下列说法正确的是 ( )

A. “ $x < -2$ ”是“ $\ln(x+3) < 0$ ”的必要不充分条件

B. 函数  $f(x) = \sqrt{x^2+2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$  的最小值为 2

C. 当  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  时，“ $\alpha = \beta$ ”是“ $\sin\alpha = \sin\beta$ ”的充分不必要条件

D. 命题  $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{2} > 0$ ，的否定是  $\exists x \in \mathbb{R}, \frac{1}{x-2} \leq 0$

10. 已知函数  $f(x) = 2\sqrt{3}\sin(x + \frac{\pi}{4})\cos(x + \frac{\pi}{4}) + \sin 2x$ ，则下列结论不正确的是 ( )

A. 函数  $y = f(x)$  的最小正周期为  $\pi$

B. 将函数  $y = f(x)$  的图象右移  $\frac{\pi}{3}$  个单位后，得到一个奇函数

C.  $x = \frac{5\pi}{6}$  是函数  $y = f(x)$  的一条对称轴

D.  $(\frac{5\pi}{6}, 0)$  是函数  $y = f(x)$  的一个对称中心

11. 在等差数列  $\{a_n\}$  中， $S_n$  为其前  $n$  项和， $a_1 = 15, S_4 = S_{12}$ ，则下列结论正确的是 ( )

A.  $d = -2$

B.  $|a_4| = |a_{13}|$

C.  $S_n$  的最大值为  $S_9$

D. 使得  $S_n > 0$  的最大整数  $n = 15$

12. 已知函数  $f(x) = \ln x, x_1 > x_2 > e$ ，则下列结论正确的是 ( )

A.  $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0$

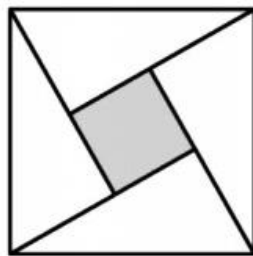
B.  $\frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)] < f(\frac{x_1 + x_2}{2})$

C.  $x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1) > 0$

D.  $e(f(x_1) - f(x_2)) < x_1 - x_2$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 赵爽是我国古代数学家、天文学家。约公元 222 年，赵爽为《周髀算经》一书作序时，介绍了“勾股圆方图”，亦称“赵爽弦图”，它是由四个全等的直角三角形与一个小正方形拼成的一个大正方形。如图是一张弦图，已知大正方形的面积为 25，小正方形的面积为 1，若直角三角形较小的锐角为  $\alpha$ ，则  $\tan(\alpha - \frac{3\pi}{4})$  的值为     。



14. 在等比数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1=2, a_6=64$ , 若数列  $\{b_n\}$  满足  $b_n = \log_2 a_n$ , 则数列  $\left\{\frac{1}{b_n b_{n+1}}\right\}$  的前  $n$  项和  $S_n = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$ .

15. 已知函数  $f(x) = \frac{\ln x}{2x+a}$  且  $f'(1) = \frac{1}{2}$ , 则  $a = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$ , 曲线  $y=f(x)$  在  $x=e$  处的切线斜率为  $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$ .

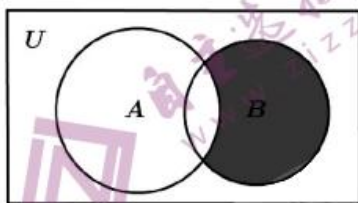
16. 已知函数  $f(x)$  是定义在  $R$  上的偶函数, 且在  $[0, +\infty)$  上是减函数,  $f(-1)=0$ , 则不等式  $f(\log_3 x) > 0$  的解集为  $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$ .

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知集合  $A = \{x | -1 < x \leq 5\}$ ,  $B = \{x | a+1 \leq x \leq 3a-1\}$ .

(1) 若  $a=3$ , 求图中阴影部分  $M$ ;



(2) 若  $B \subseteq A$ , 求实数  $a$  的取值范围.

18. (12 分)

已知  $p$ : 函数  $f(x) = (a-2m)^x$  在  $R$  上单调递减,  $q$ : 关于  $x$  的方程  $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$  的两根都大于 1.

(1) 当  $m=3$  时,  $p$  是真命题, 求  $a$  的取值范围;

(2) 若  $p$  为真命题是  $q$  为真命题的充分不必要条件, 求  $m$  的取值范围.

19. (12 分)

已知  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 且  $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{2b}{a} - 1$ .

(1) 判断三角形  $\triangle ABC$  的形状;

(2) 记线段  $AB$  上靠近点  $A$  的三等分点为  $D$ , 若  $CD = 2\sqrt{7}, b=6$ , 求  $c$ .

20. (12 分)

习总书记指出: “绿水青山就是金山银山”. 某市一乡镇响应号召, 因地制宜地将该镇打造成“生态水果特色小镇”. 调研过程中发现: 某水果树的单株产量  $U$  (单位:

千克)与施用发酵有机肥费用  $30x$  (单位:元)满足如下关系:  $U(x) = \begin{cases} x^2 + 3, 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{10x}{1+x}, 2 < x \leq 5 \end{cases}$ , 这种水果树单株的其它成本总投入为 100 元. 已知该水果的市  
场售价为 75 元/千克, 且销路畅通供不应求, 记该水果树的单株利润为  $f(x)$  (单  
位:元).

(1)求函数  $f(x)$  的解析式;

(2)当投入的肥料费用为多少元时,该单株水果树获得的利润最大? 最大利润是  
多少?

21. (12分)

已知数列  $\{a_n\}$  满足:  $a_{n+1} + a_n = 2n + 5 (n \in \mathbf{N}^*)$ , 且  $a_1 = 3$ .

(1)求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2)数列  $\{b_n\}$  满足  $b_n = \begin{cases} 1, n=1 \\ \log_{(n+1)} a_n, n \geq 2, n \in \mathbf{N}^* \end{cases}$ , 若  $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdots b_k = 2, (k \in \mathbf{N}^*)$ ,

求  $k$  的值.

22. (12分)

已知函数  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1 (a > 0, b \in \mathbf{R})$  有极值, 且导函数  $f'(x)$  的极值点  
是  $f(x)$  的零点.

(1)求  $b$  关于  $a$  的函数关系式, 并写出定义域;

(2)求证:  $b^2 > 3a$ .

2021—2022 学年度第一学期期中质量检测

高三数学试题参考答案

1. CDCA 5.CBDA 9.ACD 10.BC 11.ABD 12.BCD

13. 7 14.  $\frac{n}{n+1}$  15. 0 0 16.  $(\frac{1}{3}, 3)$

17.解: (1)  $a=3$ 时,  $B=\{x|4 \leq x \leq 8\}$ . -----1分

由韦恩图可知,  $M=(C_U A) \cap B$  -----3分

因为  $A=\{x|-1 < x \leq 5\}$

所以  $C_U A=\{x|x \leq -1 \text{ 或 } x > 5\}$  -----4分

所以  $M=\{x|5 < x \leq 8\}$  -----5分

(2) 当  $B=\emptyset$ 时,  $3a-1 < a+1$ , 解得  $a < 1$ , 此时  $B \subseteq A$  成立 -----6分

当  $B \neq \emptyset$ 时,  $3a-1 \geq a+1$ , 解得  $a \geq 1$

因为  $B \subseteq A$ , 所以  $\begin{cases} a+1 > -1 \\ 3a-1 \leq 5 \end{cases}$ , 解得  $1 \leq a \leq 2$  -----8分

综上可得, 实数  $a$  的取值范围是  $(-\infty, 2]$ . -----10分

18.解: (1) 因为  $m=3$ , 所以  $f(x)=(a-6)^x$

因为  $p$  是真命题,

所以  $0 < a-6 < 1$ , 解得  $6 < a < 7$ .

故  $a$  的取值范围是  $(6, 7)$  -----7分

(2) 若  $p$  是真命题, 则  $0 < a-2m < 1$ , 解得  $2m < a < 2m+1$ . -----6分

关于  $x$  的方程  $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$  的两根分别为  $a-1$  和  $a+1$ . -----8分

若  $q$  是真命题, 则  $a-1 > 1$ , 解得  $a > 2$ . -----10分

因为  $p$  为真命题是  $q$  为真命题的充分不必要条件, 所以  $2m \geq 2$ ,

所以  $m \geq 1$ . -----12分

19.解: (1) 因为  $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{2b}{a} - 1$

所以由正弦定理得  $\frac{a}{b} = \frac{2b}{a} - 1$  -----2分

整理得  $(a+2b)(a-b) = 0$ . -----4分

因为  $a+2b > 0$ , 所以  $a=b$ ,

所以三角形为等腰三角形. -----6分

(2) 设  $AD = x$ , 则  $BD = 2x$ ,

由余弦定理可得  $\cos \angle CDB = \frac{4x^2 + 28 - 36}{2 \times 2x \times 2\sqrt{7}}$ , -----7分

$\cos \angle CDA = \frac{x^2 + 28 - 36}{2 \times x \times 2\sqrt{7}}$ , -----8分

因为  $\angle CDB = \pi - \angle CDA$ , -----9分

所以  $\frac{4x^2 + 28 - 36}{2 \times 2x \times 2\sqrt{7}} = -\frac{x^2 + 28 - 36}{2 \times x \times 2\sqrt{7}}$ . -----10分

解得  $x = 2$ , -----11分

所以  $c = AB = 3BD = 6$ . -----12分

20.解: (1) 由题意得  $f(x) = 75U(x) - 30x - 100$ ,

$$\text{即 } f(x) = \begin{cases} 75x^2 - 30x + 125, & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{750x}{1+x} - 30x - 100, & 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

$$\text{化简得 } f(x) = \begin{cases} 75x^2 - 30x + 125, & 0 \leq x \leq 2 \\ 650 - \frac{750}{1+x} - 30x, & 2 < x \leq 5 \end{cases} \text{ -----6分}$$

(2) 当  $0 \leq x \leq 2$  时,  $f(x) = 75x^2 - 30x + 125$

为对称轴  $x = \frac{1}{5}$  开口向上的抛物线,

所以  $f(x)_{\max} = f(2) = 365$ ; -----8分

$$\text{当 } 2 < x \leq 5 \text{ 时, } f(x) = 680 - 30 \left( \frac{25}{1+x} + 1 + x \right)$$

$$\leq 680 - 60\sqrt{25} = 380 \text{, -----10分}$$

当且仅当  $\frac{25}{1+x} = 1+x$  即  $x = 4$  时取等号. -----11分

综上, 当投入的肥料费用为  $30 \times 4 = 120$  元时, 微信搜《高三答案公众号》单株水果树获得的利润最

大为 380 元. -----12分

21.解: (1)  $\because a_{n+1} + a_n = 2n + 5$ ,

$$\therefore a_{n+1} + a_{n+2} = 2n + 7,$$

$$\therefore a_{n+2} - a_n = 2,$$

$\therefore \{a_n\}$  的奇数项与偶数项各自成等差数列, 且公差均为 2, -----2分

$$\therefore a_1 = 3, \therefore a_2 = 4,$$

$\therefore a_{2n-1} = a_1 + 2(n-1) = 2n+1 = 2n-1+2 \Rightarrow a_n = n+2 (n \text{ 为奇数});$  -----4 分

$\therefore a_{2n} = a_2 + 2(n-1) = 2n+2 \Rightarrow a_n = n+2 (n \text{ 为偶数});$  -----6 分

综上  $a_n = n+2, n \in N^*$ . -----8 分

(2) 由 (1) 得  $b_n = \begin{cases} 1, & n=1 \\ \log_{(n+1)}(n+2), & n \geq 2, n \in N^* \end{cases}$

所以  $b_1 b_2 b_3 \cdots b_k$

$= \log_1 4 \cdot \log_1 5 \cdots \log_{(k+1)}(k+2)$

$= \log_3(k+2)$  -----10 分

所以  $\log_3(k+2) = 2$

解得  $k = 7$ . -----12 分

22.解: (1) 由  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ ,

得  $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b = 3(x + \frac{a}{3})^2 + b - \frac{a^2}{3}$ .

当  $x = -\frac{a}{3}$  时,  $f'(x)$  有极小值  $b - \frac{a^2}{3}$ . -----2 分

因为  $f'(x)$  的极值点是  $f(x)$  的零点.

所以  $f(-\frac{a}{3}) = -\frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} - \frac{ab}{3} + 1 = 0$ ,

又  $a > 0$ , 故  $b = \frac{2a^2}{9} + \frac{3}{a}$ . -----3 分

因为  $f(x)$  有极值, 故  $f'(x) = 0$  有实根.

从而  $b - \frac{a^2}{3} = \frac{1}{9a}(27 - a^3) \leq 0$ , 即  $a \geq 3$ . -----4 分

当  $a = 3$  时,  $f'(x) > 0 (x \neq -1)$ , 故  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上是增函数,  $f(x)$  没有极值;

当  $a > 3$  时,  $f'(x) = 0$  有两个相异的实根  $x_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 3b}}{3}$ ,  $x_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 3b}}{3}$ .

列表如下:

|         |                  |       |              |       |                  |
|---------|------------------|-------|--------------|-------|------------------|
| $x$     | $(-\infty, x_1)$ | $x_1$ | $(x_1, x_2)$ | $x_2$ | $(x_2, +\infty)$ |
| $f'(x)$ | +                | 0     | -            | 0     | +                |

|        |            |     |            |     |            |
|--------|------------|-----|------------|-----|------------|
| $f(x)$ | $\nearrow$ | 极大值 | $\searrow$ | 极小值 | $\nearrow$ |
|--------|------------|-----|------------|-----|------------|

故  $f(x)$  的极值点是  $x_1, x_2$ . 从而  $a > 3$ .

因此  $b = \frac{2a^2}{9} + \frac{3}{a}$ , 定义域为  $(3, +\infty)$ . -----6分

(2) 由 (1) 知  $b = \frac{2a^2}{9} + \frac{3}{a}$

所以  $\frac{b}{\sqrt{a}} = \frac{2a\sqrt{a}}{9} + \frac{3}{a\sqrt{a}}$  -----8分

设  $g(t) = \frac{2t}{9} + \frac{3}{t}$ , -----9分

则  $g'(t) = \frac{2}{9} - \frac{3}{t^2} = \frac{2t^2 - 27}{9t^2}$ .

当  $t \in (\frac{3\sqrt{6}}{2}, +\infty)$  时,  $g'(t) > 0$ ,

从而  $g(t)$  在  $(\frac{3\sqrt{6}}{2}, +\infty)$  上单调递增. -----11分

因为  $a > 3$ ,

所以  $a\sqrt{a} > 3\sqrt{3}$ ,

故  $g(a\sqrt{a}) > g(3\sqrt{3}) = \sqrt{3}$ , 即  $\frac{b}{\sqrt{a}} > \sqrt{3}$ .

因此  $b^2 > 3a$ . -----



## 关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于中国拔尖人才培养的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户（官方网址：[www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95% 以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承“专业、专注、有态度”的创办公念，不断探索“K12 教育+互联网+ 大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的新高考拔尖人才培养服务平台。



微信搜一搜



自主选拔在线