二模理科答案(理数)

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	A	B	D	D	D	C	C	A	C	B	A

二、填空题

13. **700**　　14. $\frac{1}{3}$　　15. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　16. $x^2+y^2=4$; $\sqrt{17}$ **(注：第一个空 2 分，第二个空 3 分)**

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. 解：

（Ⅰ）设数列$\{b_n\}$的公差为d

当$n=1$时，$S_1=a_1=a_2-1=1\Rightarrow a_2=2a_1=2$.　　………1 分

当$n\geq 2$时，$S_n=a_{n+1}-1$，$S_{n-1}=a_n-1$，　　………2 分

两式相减得$a_n=a_{n+1}-a_n\Rightarrow 2a_n=a_{n+1}(n\geq 2)$，又因为$a_2=2a_1$

所以$a_n=2^{n-1}$　　………3 分

又因为$\begin{cases}a_2=b_4=4\\ b_2+b_5=b_7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3d+b_1=4\\ (b_1+d)+(b_1+4d)=b_1+6d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b_1=1\\ d=1\end{cases}$，　　………5 分

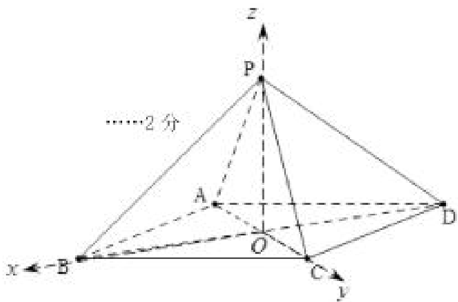
所以$b_n=n$　　……6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得$c_n=\dfrac{a_nb_n}{(n+2)b_{n+1}}=\dfrac{2^{n-1}\cdot n}{(n+1)(n+2)}$　　………8 分

$$=\frac{2^n}{n+2}-\frac{2^{n-1}}{n+1}$$　　………10 分

得$T_n=\left(\dfrac{2^2}{3}-\dfrac{2}{2}\right)+\left(\dfrac{2^3}{4}-\dfrac{2^2}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{2^{n+1}}{n+2}-\dfrac{2^n}{n+1}\right)=\dfrac{2^n}{n+2}-\dfrac{1}{2}$　　……12 分

18. 解：



（Ⅰ）连$AC\cap BD=O$，

$\left.\begin{matrix}\text{平面 }PBD\perp\text{平面 }ABCD\\ AC\perp BD\end{matrix}\right\}\Rightarrow AC\perp\text{平面 }PBD$　　……2 分

又$\because PO\subset$平面PBD，

$\therefore AC\perp PO$，又$\because AO=OC$，$\therefore PA=PC$　　……4 分

（Ⅱ）

$\left.\begin{matrix}\left.\begin{matrix}PB=PD\\ BO=OD\end{matrix}\right\}\Rightarrow PO\perp BD\\ \text{面}PBD\perp\text{面}ABCD\\ PO\subset\text{面}PBD\end{matrix}\right\}\Rightarrow PO\perp$面$ABCD$，菱形$ABCD$中$OB\perp OC$所以$OB,OC,OP$两两垂直

以O为原点，OB,OC,OP方向分别为x,y,z轴正向建立空间直角坐标系，……6 分

在等腰直角三角形中PBD，记$PB=PD=\sqrt{2},\angle BPD=\frac{\pi}{2}$，

所以$B(1,0,0),P(0,0,1),D(-1,0,0)$，设$C(0,t,0)(t>0)$，平面$BPC$的法向量$\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{PB}\\ \overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{BC}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{PB}=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{BC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-z=0\\ -x+ty=0\end{cases}$，令$y=1$，可得$\overrightarrow{n_1}=(t,1,t)$ ……8 分

同理可求平面BPC的法向量，$\overrightarrow{n_2}=(-t,1,t)$ ……9 分

$\therefore\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{-t^2+1+t^2}{\sqrt{2t^2+1}\cdot\sqrt{2t^2+1}}=\frac{1}{2t^2+1}=\frac{1}{2}$，$\therefore t=\frac{\sqrt{2}}{2}$， ……11 分

$\therefore$在$Rt\triangle OBC$中，$OC=\sqrt{2},OB=1\Rightarrow\cos\angle OBC=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\Rightarrow\cos\angle ABC=\frac{1}{3}$ …12 分

19.**解：**

（I）$f'(x)=x-k-\frac{2}{x}=\frac{x^2-kx-2}{x}$（$x>0$） ……1 分

令$f'(x)=0\Rightarrow x_3=\frac{k-\sqrt{k^2+8}}{2}<0,x_4=\frac{k+\sqrt{k^2+8}}{2}>0$ ……2 分

x	$(0,x_4)$	x_4	$(x_4+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	+
$f(x)$	递减	极小值	递增

……5 分

所以$f(x)$的极小值点为$x_4=\frac{k+\sqrt{k^2+8}}{2}$ ……6 分

（II）$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{x_2+x_1}{2}-k-\frac{2(\ln x_2-\ln x_1)}{x_2-x_1}$

$f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{x_1+x_2}{2}-k-\frac{2}{\frac{x_1+x_2}{2}}$ ……8 分

所以$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\Leftrightarrow\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)-\frac{2(x_2-x_1)}{x_2+x_1}>0$

即证 $\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)-\frac{2(\frac{x_2}{x_1}-1)}{\frac{x_2}{x_1}+1}>0$，令 $t=\frac{x_2}{x_1}(t>1)$，即证 $\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}>0$，……9 分

令 $h(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$，则 $h'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，……11 分

所以 $h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，所以 $h(t)>h(1)=0$，

所以 $\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}>0$，原题得证. ……12 分

20. 解：

（Ⅰ）由已知过滤效果服从 $N(0.97,90.25\times10^{-6})$（$90.25\times10^{-6}=(9.5\times10^{-3})^2,\sigma=9.5\times10^{-3}=0.0095$），则

$0.936<0.97-0.0095\times3=0.9415$ ……2 分

生产的口罩中出现过滤效果在 3σ 以外的值，发生的可能性很小，一旦发生，认为停止生产. ……4 分

（Ⅱ）①不妨记："N95 口罩的过滤效果" 为 Y，一只口罩为 "优质品" 的概率为

$P(Y>0.951)=P(Y>0.97-2\times0.0095)=1-(\frac{1}{2}-\frac{p(0.97-2\sigma<Y<0.97+2\sigma)}{2})=0.9772$ ……6 分

②依题意 $X\sim B(1000,0.9772)$，记 $n=1000,p=0.9772$ ……7 分

$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,10^3)$ ……9 分

$$\begin{cases}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\ge C_n^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k+1}\\ C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\ge C_n^{k+1}p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}\end{cases}$$ ……11 分

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{p}{k}\ge\frac{1-p}{1001-k}\\ \frac{1-p}{1000-k}\ge\frac{p}{k+1}\end{cases}\Rightarrow1001p-1\le k\le1001p\Rightarrow k=978$$ ……12 分

21. 解：

（Ⅰ）设 $P(x_0,y_0)$，$F_1(-c,0)$、$F_2(c,0)$，则 $\overrightarrow{F_1P}=(x_0+c,y_0),\overrightarrow{F_2P}=(x_0-c,y_0)$

$$S_{\triangle AF_1F_2}=\frac{1}{2}\cdot(a+c)\cdot|y_P|\le\frac{1}{2}\cdot(a+c)\cdot b=\frac{2+\sqrt3}{2}\Rightarrow(a+c)\cdot b=2+\sqrt3$$ ……2 分

$$\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_2P}=x_0^2+y_0^2-c^2\\ y_0^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x_0^2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_2P}=\frac{c^2}{a^2}x_0^2+b^2-c^2\\ 0\le x_0^2\le a^2\end{array}\right\}\Rightarrow(\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_2P})_{\max}=b^2=1$$ ……4 分

$$\begin{cases}a+c=2+\sqrt3\\ a^2-c^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ c=\sqrt3\end{cases}$$

所以，椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.……5 分

（Ⅱ）若选①

当 AB 的斜率存在时，设直线 AB 的方程为 $y=kx+m$，设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$,$M(x_0,y_0)$

联立$\begin{cases}y=kx+m\\x^2+4y^2-4=0\end{cases}$消去 y 得，$(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4=0$

$$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{-8km}{4k^2+1}\\x_1\cdot x_2=\frac{4m^2-4}{4k^2+1}\\\Delta=16(4k^2+1-m^2)>0\end{cases}$$ ……6 分

$$\Rightarrow|AB|=\sqrt{k^2+1}|x_1-x_2|=\frac{4\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{4k^2+1-m^2}}{4k^2+1}$$

原点到直线 AB 的距离为：$d=\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}$ ……7 分

由 $S_{\Delta AOB}=1$ 可知：$\frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{4k^2+1-m^2}}{4k^2+1}\cdot\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=1\Rightarrow4(4k^2+1-m^2)\cdot m^2=(4k^2+1)^2$

$(4k^2+1-2m^2)^2=0\Rightarrow4k^2+1=2m^2$ ……9 分

$$|AB|=\frac{4\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{4k^2+1-m^2}}{4k^2+1}=\frac{2\sqrt{2}\sqrt{k^2+1}}{\sqrt{4k^2+1}}$$

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{4km}{4k^2+1},y_0=\frac{kx_1+m+kx_2+m}{2}=\frac{m}{4k^2+1}\Rightarrow|OM|=\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}=\sqrt{\frac{16k^2+1}{2(4k^2+1)}}$$

所以，$|AB|\cdot|OM|=\frac{2\sqrt{2}\sqrt{k^2+1}}{\sqrt{4k^2+1}}\cdot\sqrt{\frac{16k^2+1}{2(4k^2+1)}}=\frac{\sqrt{4(k^2+1)\cdot(16k^2+1)}}{4k^2+1}$ ……10 分

$$\le\frac{\sqrt{\left(\frac{20k^2+5}{2}\right)^2}}{4k^2+1}=\frac{5}{2}$$ ……11 分

当且仅当 $k=\pm\frac{1}{2}$ 时，$(|AB|\cdot|OM|)_{\max}=\frac{5}{2}$，

又 $|AB|\cdot|OM|\le\lambda$ 恒成立，则 $\lambda\ge\frac{5}{2}$，即：$\lambda_{\min}=\frac{5}{2}$.……12 分 **（未指出取等条件扣 1 分）**

若选②

当 AB 的斜率存在时，设直线 AB 的方程为 $y=kx+m$，设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$,$M(x_0,y_0)$

联立$\begin{cases}y=kx+m\\x^2+4y^2-4=0\end{cases}$消去 y 得，$(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4=0$

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-8km}{4k^2+1} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{4m^2-4}{4k^2+1} \\ \Delta=16(4k^2+1-m^2)>0 \end{cases}$$ ……5 分

$\left|\vec{m}+\vec{n}\right|=\left|\vec{m}-\vec{n}\right| \Rightarrow \vec{m}\cdot\vec{n}=0$ ……6 分

（其中 $\Rightarrow \vec{m}\cdot\vec{n}=\dfrac{x_1x_2}{a^2}+\dfrac{y_1y_2}{b^2}=\dfrac{x_1x_2}{4}+(kx_1+m)(kx_2+m)=0$

$\Rightarrow (4k^2+1)x_1x_2+4km(x_1+x_2)+4m^2=0$

$\Rightarrow 4(4k^2+1)(m^2-1)-32k^2m^2+4m^2(4k^2+1)=0$

$4(4k^2+1)-8m^2=0 \Rightarrow 4k^2+1=2m^2$ ……8 分

$\Rightarrow |AB|=\sqrt{k^2+1}\,|x_1-x_2|=\dfrac{4\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{4k^2+1-m^2}}{4k^2+1}$

$x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{4km}{4k^2+1},\ y_0=\dfrac{kx_1+m+kx_2+m}{2}=\dfrac{m}{4k^2+1}$

$|OM|=\sqrt{x_0^{\,2}+y_0^{\,2}}=\sqrt{\dfrac{16k^2+1}{2(4k^2+1)}}$ ……9 分

所以，$|AB|\cdot|OM|=\dfrac{2\sqrt{2}\sqrt{k^2+1}}{\sqrt{4k^2+1}}\cdot\sqrt{\dfrac{16k^2+1}{2(4k^2+1)}}=\dfrac{\sqrt{4(k^2+1)\cdot(16k^2+1)}}{4k^2+1}$ ……10 分

$\le\dfrac{\sqrt{\left(\dfrac{20k^2+5}{2}\right)^2}}{4k^2+1}=\dfrac{5}{2}$ ……11 分

当且仅当 $k=\pm\dfrac{1}{2}$ 时，$(|AB|\cdot|OM|)_{\max}=\dfrac{5}{2}$，

又 $|AB|\cdot|OM|\le\lambda$ 恒成立，则 $\lambda\ge\dfrac{5}{2}$，即：$\lambda_{\min}=\dfrac{5}{2}$． ……12 分 **（未指出取等条件扣 1 分）**

22. 解：

（I）由 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$ 得直线 $y=2$ 的极坐标方程为 $\rho\sin\theta=2$； ……………………2 分

将曲线 C 的此时方程 $\begin{cases} x=2\cos\varphi \\ y=\sqrt{2}\sin\varphi \end{cases}$（$\varphi$为参数）化为：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$

由 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$ 得曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2(1+\sin^2\theta)=4$ ……………………5 分

（II）点 $A(\rho_1,\alpha)$ 在曲线 C 上，所以 $\rho_1^{\,2}(1+\sin^2\alpha)=4$，所以 $\dfrac{1}{\rho_1^{\,2}}=\dfrac{1+\sin^2\alpha}{4}$，即 $\dfrac{1}{|OA|^2}=\dfrac{1+\sin^2\alpha}{4}$

……………………………………6 分

点$B(\rho_2,\alpha+\frac{\pi}{4})$在直线$l$上，所以$\rho_2\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=2$，所以$\frac{1}{\rho_2}=\frac{\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})}{2}$即$\frac{1}{|OB|}=\frac{\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})}{2}$

所以$\frac{1}{|OB|^2}=\frac{\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{4})}{4}=\frac{1-\cos(2\alpha+\frac{\pi}{2})}{8}=\frac{1+\sin 2\alpha}{8}$ ……………………………7 分

所以$\frac{1}{|OA|^2}+\frac{1}{|OB|^2}=\frac{1+\sin^2\alpha}{4}+\frac{1+\sin 2\alpha}{8}=\frac{1+\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}{4}+\frac{1+\sin 2\alpha}{8}$

$=\frac{3-\cos 2\alpha}{8}+\frac{1+\sin 2\alpha}{8}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{8}\sin(2\alpha-\frac{\pi}{4})$

……………………………9 分

当$2\alpha-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，即$\alpha=k\pi+\frac{3\pi}{8}(k\in Z)$时，$\sin(2\alpha-\frac{\pi}{4})$取到最大值1

$\frac{1}{|OA|^2}+\frac{1}{|OB|^2}$取到最大值$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{8}$ ……………………………10 分

23. 解：

（Ⅰ）$a+b+c=6$，且$c=5$，所以$a+b=1$；

$(\frac{1}{a^2}-1)\cdot(\frac{1}{b^2}-1)=\frac{1-a^2}{a^2}\cdot\frac{1-b^2}{b^2}=\frac{(1-a)(1+a)(1-b)(1+b)}{a^2b^2}=\frac{(1+a)(1+b)}{ab}=1+\frac{2}{ab}$ …………2 分

$1=a+b\geq 2\sqrt{ab}$（当且仅当$a=b$时取到等号）$\Rightarrow ab\leq\frac{1}{4}$ …………4 分

所以$(\frac{1}{a^2}-1)\cdot(\frac{1}{b^2}-1)\geq 9$当且仅当$\begin{cases}a=b\\a+b=1\end{cases}$即$a=b=\frac{1}{2}$时取到等号

当 $a=b=\frac{1}{2}$时$(\frac{1}{a^2}-1)\cdot(\frac{1}{b^2}-1)$取到最小值为9 ……………………5 分（未指出取等条件扣 1 分）

（Ⅱ）$a^2+b^2-2b+c^2-4c=a^2+(b-1)^2+(c-2)^2-5$ ……………………………6 分

由柯西公式：

$\left[a^2+(b-1)^2+(c-2)^2\right]\cdot\left(1^2+1^2+1^2\right)\geq(a+b-1+c-2)^2$（当且仅当$a=b-1=c-2$时取到等号），

得$a^2+(b-1)^2+(c-2)^2\geq\frac{(a+b+c-3)^2}{3}$ ……………………………9 分

又因为$a+b+c=6$，所以$a^2+(b-1)^2+(c-2)^2\geq 3$，

即$a^2+b^2-2b+c^2-4c\geq -2$（当且仅当$\begin{cases}a=b-1=c-2\\a+b+c=6\end{cases}$即$\begin{cases}a=1\\b=2\\c=3\end{cases}$时取到等号）

……………………………10 分（**不写取等条件可不扣分**）

自主招生在线创始于 2014 年，是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国强基计划、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

识别二维码，快速关注

温馨提示：

全国重点中学 2019-2020 学年高三月考试题及参考答案（更新下载中），点击链接获得

http://www.zizzs.com/c/201910/39637.html