十堰市2021年高三年级4月调研考试
数学参考答案

1. B　因为$(x+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})=2x-1+(2+x)\mathrm{i}=1+y\mathrm{i}$，所以$2x-1=1$，$2+x=y$，解得$x=1$，$y=3$.

2. D　因为$M=\{x|x>1\}$，$N=\{x|-\sqrt{10}<x<\sqrt{10}\}$，所以$M\cap N=\{x|1<x<\sqrt{10}\}$.

3. A　设该圆柱的高为h，底面圆的半径为r，则$h=2r$，$2\pi rh=4\pi$，从而$r=1$，$h=2$，故该圆柱的体积是$\pi r^2h=2\pi$.

4. C　因为点$A(a,2)$到C的准线的距离为4，所以$\frac{1}{4m}+2=4$，得$m=\frac{1}{8}$.

5. B　若直线m,n与平面α所成角相等，则$m\parallel n$或m,n相交或m,n异面；若$m\parallel n$，则直线m,n与平面α所成角相等.故"直线m,n与平面α所成角相等"是"$m\parallel n$"的必要不充分条件.

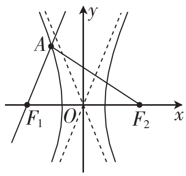
6. C　$v=v_0\ln\frac{M}{m}=1000\times\ln 500=1000\times\frac{\lg 500}{\lg e}=1000\times\frac{3-\lg 2}{\lg e}\approx 6219\ \mathrm{m/s}$.

7. A　$f'(x)=6x^2+6mx+2n$.因为$f(x)$在$x=1$处有极小值，且极小值为6，所以$\begin{cases}f'(1)=0,\\f(1)=6,\end{cases}$即$\begin{cases}6+6m+2n=0,\\2+3m+2n+m^2=6,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=5,\\n=-18\end{cases}$或$\begin{cases}m=-2,\\n=3.\end{cases}$

当$\begin{cases}m=5,\\n=-18\end{cases}$时，$f'(x)=6x^2+30x-36=(x+6)(6x-6)$，则$f(x)$在$(-\infty,-6)$上单调递增，在$(-6,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，$f(x)$在$x=1$处有极小值6.

当$\begin{cases}m=-2,\\n=3\end{cases}$时，$f'(x)=6x^2-12x+6=6(x-1)^2\geqslant 0$，则$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增，$f(x)$无极值.

8. A　如图，设$|AF_2|=m$，$|AF_1|=n$，由题意可得$\begin{cases}m-n=2a,\\\frac{m}{n}=\frac{b}{a},\\m^2+n^2=4c^2,\end{cases}$解得$b=2a$，则$e=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{5}$.



9. ABD　在$(3x-\frac{1}{\sqrt{x}})^n$的展开式中，各项系数和与二项式系数和之和为128，

令$x=1$，得各项系数和为2^n，二项式系数和为2^n，则$2\times 2^n=128$，得$n=6$，即二项式系数和为64，各项系数和也为64.$(3x-\frac{1}{\sqrt{x}})^6$展开式的通项为$T_{k+1}=\mathrm{C}_6^k\cdot(3x)^{6-k}\cdot(-\frac{1}{\sqrt{x}})^k=\mathrm{C}_6^k\cdot(-1)^k3^{6-k}\cdot x^{6-\frac{3}{2}k}$，

令$6-\frac{3}{2}k=0$，得$k=4$，因此，展开式中的常数项为$T_5=\mathrm{C}_6^4\cdot(-1)^4\cdot 3^2=135$.

10. ABC　每月的平均AQI指数都不超过100，故全年的平均AQI指数也不超过100，对应的空气质量为优或良，故选项A正确；每月的AQI指数最小值均不超过50，故每月都至少有一天空气质量为优，选项B正确；2月，8月，9月和12月的AQI指数最大值均大于100，故至少有一天出现了污染天气，故选项C正确；2月，8月，9月，12月中空气质量为"污染"的天数不确定，故选项D不一定正确.

11. ABD　若圆M与y轴相切，则$|3k|=\sqrt{1+k^2}$，解得$k=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$，所以A为真命题.

因为$(3k)^2+(4k+2)^2=25k^2+16k+4\geqslant\frac{36}{25}$，所以$|OM|\geqslant\frac{6}{5}$，所以B为真命题.

若直线 $y=x$ 平分圆 M 的周长，则 $3k=4k+2$，即 $k=-2$，所以 C 为假命题.

若圆 M 与圆 $(x-3k)^2+y^2=4k^2$ 外切，则 $|4k+2|=\sqrt{1+k^2}+\sqrt{4k^2}$，

设函数 $f(k)=|4k+2|-\sqrt{1+k^2}-\sqrt{4k^2}$，因为 $f(0)=1>0$，$f(-1)=-\sqrt{2}<0$，

所以 $f(k)$ 在 $(-1,0)$ 内必有零点，则方程 $|4k+2|=\sqrt{1+k^2}+\sqrt{4k^2}$ 有解，所以 D 为真命题.

12. BCD　因为 $f(x)=2a\sin\omega x\cos\omega x-2\cos^2\omega x+1=a\sin 2\omega x-\cos 2\omega x=\sqrt{a^2+1}\sin(2\omega x-\varphi)$，

其中 $\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$，$\sin\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$. 因为 $f(x)$ 的最小正周期为 π，所以 $\omega=1$，故 A 错误.

因为对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)\geqslant f(x_0)$ 恒成立，所以 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的最小值.

若 $x_0=-\dfrac{\pi}{6}$，则 $2\times(-\dfrac{\pi}{6})-\varphi=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，$\varphi=\dfrac{\pi}{6}-2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

所以 $\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$a=\sqrt{3}$，故 B 正确.

因为 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的最小值，所以 $f(x_0-\dfrac{\pi}{2})$ 为最大值，所以 $\sqrt{a^2+1}=2$，所以 $a=\sqrt{3}$，故 C 正确.

因为当 $x\in(x_0-\dfrac{3\pi}{4},x_0-\dfrac{\pi}{2})$ 时，$f(x)>0$，所以 $g(x)=-f(x)$.

因为 $f(x)$ 在 $(x_0-\dfrac{3\pi}{4},x_0-\dfrac{\pi}{2})$ 上单调递增，所以 $g(x)$ 在 $(x_0-\dfrac{3\pi}{4},x_0-\dfrac{\pi}{2})$ 上单调递减.

当 $x\in(x_0-\dfrac{\pi}{2},x_0-\dfrac{\pi}{4})$ 时，$f(x)>0$，所以 $g(x)=-f(x)$.

因为 $f(x)$ 在 $(x_0-\dfrac{\pi}{2},x_0-\dfrac{\pi}{4})$ 上单调递减，所以 $g(x)$ 在 $(x_0-\dfrac{\pi}{2},x_0-\dfrac{\pi}{4})$ 上单调递增，

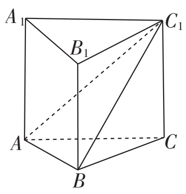
所以 $x_0-\dfrac{3\pi}{4}<x_0-\theta\leqslant x_0-\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta<\dfrac{3\pi}{4}$，故 D 正确.

13. -1　由题意可得 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(3,2m+3)$. 因为 $(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，所以 $(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=3-3(2m+3)=0$，解得 $m=-1$.

14. $f(x)=x^2+2$（答案不唯一）　给出的 $f(x)$ 只要满足定义域是 $\mathbf{R}$，$f(-x)=f(x)$，且 $f(0)=2$，$f(1)=3$ 就可以.

15. 210　由题可知，甲同学所需支付的门票费的期望值为 $\dfrac{1}{6}\times(230+290+290+190+130+130)=210$ 元.

16. $\dfrac{32\sqrt{3}}{27}$　如图，由题意可知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的直径为 AC_1，则 $AC_1=4$，



即 $AB^2+BC^2+C_1C^2=AC_1^2=16$，从而 $2AB^2+C_1C^2=16$.

三棱锥 $P-C_1-ABC$ 的体积为 $V=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot CC_1=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}AB^2\cdot CC_1=-\dfrac{1}{12}CC_1^3+\dfrac{4}{3}CC_1$.

设 $f(x)=-\dfrac{1}{12}x^3+\dfrac{4}{3}x(0<x<4)$，则 $f'(x)=-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{4}{3}(0<x<4)$. 由 $f'(x)>0$，得 $0<x<\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$；

由 $f'(x)<0$，得 $x>\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. 故 $f(x)\leqslant f(\dfrac{4\sqrt{3}}{3})=\dfrac{32\sqrt{3}}{27}$.

17. 解：(1) 由题可知，这 200 位顾客所打分数的平均值为 $\dfrac{10\times\frac{65}{2}+16\times\frac{95}{2}+34\times\frac{125}{2}+70\times\frac{155}{2}+70\times\frac{185}{2}}{200}=$ 75.55，…………………………………… 3 分

故这 200 位顾客所打分数的平均值为 75.55. ………………………… 5 分

(2)根据所给数据,可得 2×2 列联表:

	满意	不满意
男性顾客	80	20
女性顾客	60	40

………………………………………………………………………… 7 分

根据列联表得 $K^2=\frac{200\times(80\times40-20\times60)^2}{100\times100\times140\times60}\approx9.524$. ………… 9 分

因为 $9.524>6.635$,所以有 99% 的把握认为顾客对公司服务质量的态度与性别有关. ………… 10 分

18. (1)证明:因为 $a_{n+1}-3a_n+2a_{n-1}=1$,

所以 $a_{n+1}-a_n=2(a_n-a_{n-1})+1$, ………… 3 分

即 $\frac{a_{n+1}-a_n+1}{a_n-a_{n-1}+1}=2$. ………… 4 分

因为 $a_1=1,a_2=4$,所以 $a_2-a_1+1=4$, ………… 5 分

故数列 $\{a_{n+1}-a_n+1\}$ 是首项为 4,公比为 2 的等比数列. ………… 6 分

(2)解:由(1)知 $a_{n+1}-a_n+1=2^{n+1}$. ………… 7 分

因为 $a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$

$=(2^2+2^3+\cdots+2^n)-(n-1)+1$, ………… 8 分

所以 $a_n=2^{n+1}-n-2$. ………… 10 分

所以 $S_n=(2^2+2^3+\cdots+2^{n+1})-(1+2+\cdots+n)-2n=\frac{4(1-2^n)}{1-2}-\frac{n(n+1)}{2}-2n$, ………… 11 分

故 $S_n=2^{n+2}-\frac{n^2+5n}{2}-4$. ………… 12 分

19. 解:(1)因为 $\tan\angle ACD=3\sqrt{7}$,所以 $\sin\angle ACD=\frac{3\sqrt{7}}{8}$, ………… 2 分

所以△ACD 的面积 $S=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot CD\cdot\sin\angle ACD=\frac{3\sqrt{7}}{5}\ \mathrm{m}^2$. ………… 4 分

(2)因为 $\tan\angle ACD=3\sqrt{7}$,所以 $\cos\angle ACD=\frac{1}{8}$, ………… 5 分

所以 $AD^2=1.6^2+2^2-2\times1.6\times2\times\frac{1}{8}=5.76$,则 $AD=2.4$. ………… 7 分

因为 $\cos\angle ADC=\frac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\cdot CD}=\frac{3}{4}$, ………… 8 分

所以 $\sin\angle ADC=\frac{\sqrt{7}}{4}$. ………… 9 分

又 $\cos\angle BDC=-\frac{\sqrt{7}}{4}=-\sin\angle ADC$,所以 $\angle ADB=\frac{\pi}{2}$, ………… 10 分

故 $AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=\sqrt{2.4^2+1.8^2}=3$ m. ………… 12 分

20. (1)证明:过点 F 作 $HF/\!/AD$,$HF\cap PA=H$,连接 BH.

因为 $HF/\!/AD$,所以 $\frac{HF}{AD}=\frac{PF}{PD}$. ………… 1 分

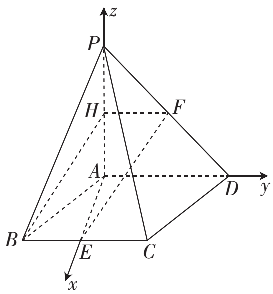
因为 $PF:DF=BE:CE$,所以 $\frac{PF}{PD}=\frac{BE}{BC}$,所以 $\frac{HF}{AD}=\frac{BE}{BC}$. ………… 3 分

因为四边形 $ABCD$ 是菱形,所以 $BC/\!/AD$,且 $BC=AD$,

所以 $HF/\!/BE$,且 $HF=BE$,所以四边形 $BEFH$ 是平行四边形,则 $EF/\!/BH$. ………… 5 分

因为 $BH\subset$平面 PAB,$EF\not\subset$平面 PAB,所以 $EF//$平面 PAB. ………………………………………………… 6 分

(2)解:以 A 为原点,过 A 作垂直 AD 的直线为 x 轴,$\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AP}$的方向分别为 y,z 轴的正方向,建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$.



设 $AB=2$,则 $B(\sqrt{3},-1,0)$,$C(\sqrt{3},1,0)$,$D(0,2,0)$,$P(0,0,2\sqrt{2})$,从而$\overrightarrow{BC}=(0,2,0)$,$\overrightarrow{PC}=(\sqrt{3},1,-2\sqrt{2})$,$\overrightarrow{CD}=(-\sqrt{3},1,0)$. ………………………………… 8 分

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=\sqrt{3}x_1+y_1-2\sqrt{2}z_1=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=2y_1=0,\end{cases}$令 $x_1=2\sqrt{2}$,得 $\boldsymbol{n}=(2\sqrt{2},0,\sqrt{3})$. …… 9 分

设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PC}=\sqrt{3}x_2+y_2-2\sqrt{2}z_2=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CD}=-\sqrt{3}x_2+y_2=0,\end{cases}$令 $x_2=2$,得 $\boldsymbol{m}=(2,2\sqrt{3},\sqrt{6})$. ………………………………… 10 分

设二面角 $B-PC-D$ 为 θ,由图可知 θ 为钝角,

故 $\cos\theta=-|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=-|\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}|=-\dfrac{4\sqrt{2}+0+3\sqrt{2}}{\sqrt{11}\times\sqrt{22}}=-\dfrac{7}{11}$. …………………………………… 12 分

21. 解:(1)设点 $P(x_0,y_0)$,则$\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$. ………………………………………………………………………… 1 分

因为$|PF|=\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}=\sqrt{(x_0-c)^2+b^2-\dfrac{b^2}{a^2}x_0^2}=\sqrt{\dfrac{c^2}{a^2}x_0^2-2cx_0+a^2}=a-\dfrac{c}{a}x_0$,

点 P 到直线 $x=\dfrac{a^2}{c}$的距离 $d=\dfrac{a^2}{c}-x_0$, ………………………………………………………………… 4 分

所以$\dfrac{|PF|}{d}=\dfrac{a-\dfrac{c}{a}x_0}{\dfrac{a^2}{c}-x_0}=\dfrac{c}{a}=e=\dfrac{1}{2}$,

即 P 到 F 的距离与 P 到直线 $x=\dfrac{a^2}{c}$的距离之比为定值$\dfrac{1}{2}$. ………………………………………………… 5 分

(2)因为 $c=1$,$e=\dfrac{1}{2}$,所以 $a=2$,$b=\sqrt{3}$,即椭圆 C 的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ………………………… 6 分

假设存在这样的一点 Q,设 $Q(0,t)$,直线 l:$y=kx+1$,

联立方程组$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\\ y=kx+1,\end{cases}$消去 y 得$(3+4k^2)x^2+8kx-8=0$,$\Delta=96(2k^2+1)>0$. ……………………… 7 分

设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=\dfrac{-8k}{3+4k^2}$,$x_1x_2=\dfrac{-8}{3+4k^2}$. ………………………………………………… 8 分

因为 y 轴平分$\angle MQN$,所以直线 QM 与 QN 的斜率互为相反数,

即 $k_{QM}+k_{QN}=\dfrac{kx_1+1-t}{x_1}+\dfrac{kx_2+1-t}{x_2}=\dfrac{2kx_1x_2+(1-t)(x_1+x_2)}{x_1x_2}=0$, ……………………………………… 9 分

所以 $2k\cdot\dfrac{-8}{3+4k^2}+(1-t)\cdot\dfrac{-8k}{3+4k^2}=\dfrac{-16k-8k(1-t)}{3+4k^2}=\dfrac{8k(t-3)}{3+4k^2}=0$, ………………………………… 11 分

因为$-8k(3-t)=0$与 k 无关,所以 $t=3$.

故在 y 轴上存在一点 $Q(0,3)$,使得 y 轴始终平分$\angle MQN$. ………………………………………………………… 12 分

22. 解:(1)$f(x)=(9+a)\ln x-ax^2+ax$,则 $f'(x)=\dfrac{9+a}{x}-2ax+a=\dfrac{-2ax^2+ax+9+a}{x}$, ………………… 1 分

若要函数 $f(x)$有两个极值点,只要方程$-2ax^2+ax+9+a=0$有两个不等正根, ……………………………… 2 分

则$\begin{cases}\Delta=a^2+8a(9+a)>0,\\ \dfrac{a}{2a}>0,\\ -\dfrac{9+a}{2a}>0,\end{cases}$ …………………………………………………………………… 4 分

解得$-9<a<-8$,即 a 的取值范围为$(-9,-8)$. …………………………………………………… 5 分

(2)设$-2ax^2+ax+9+a=0$ 的两个正根分别为 x_1,x_2,且 $x_1<x_2$,可知当 $x=x_2$ 时有极小值 $f(x_2)$,因为 $y=-2ax^2+ax+9+a$ 图象的对称轴为直线 $x=\dfrac{1}{4}$,所以 $0<x_1<\dfrac{1}{4}<x_2<\dfrac{1}{2}$,且$-2ax_2^2+ax_2+9+a=0$,

得 $a=\dfrac{9}{2x_2^2-x_2-1}$. …………………………………………………………………………… 7 分

$f(x_2)=(9+a)\ln x_2-ax_2^2+ax_2=a(-x_2^2+x_2+\ln x_2)+9\ln x_2=9\cdot\dfrac{-x_2^2+x_2+\ln x_2}{2x_2^2-x_2-1}+9\ln x_2$,

令 $h(x_2)=9\cdot\dfrac{-x_2^2+x_2+\ln x_2}{2x_2^2-x_2-1}+9\ln x_2$,

则 $h'(x_2)=9\cdot\dfrac{(-2x_2+1+\dfrac{1}{x_2})(2x_2^2-x_2-1)-(-x_2^2+x_2+\ln x_2)(4x_2-1)}{(2x_2^2-x_2-1)^2}+\dfrac{9}{x_2}$

$=9\cdot\dfrac{(x_2^2-x_2-\ln x_2)(4x_2-1)}{(2x_2^2-x_2-1)^2}$. …………………………………………………………… 9 分

记 $z(x)=x^2-x-\ln x(\dfrac{1}{4}<x\leqslant 1)$,有 $z'(x)=\dfrac{(2x+1)(x-1)}{x}\leqslant 0$ 对 $x\in(\dfrac{1}{4},1]$恒成立,又 $z(1)=0$,故对 $x\in(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2})$,恒有 $z(x)>z(1)$,即 $z(x)>0$,

所以 $h'(x_2)>0$ 对于$\dfrac{1}{4}<x_2<\dfrac{1}{2}$恒成立,即 $h(x_2)$在$(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2})$上单调递增,则 $h(\dfrac{1}{4})<h(x_2)<h(\dfrac{1}{2})$.

又 $h(\dfrac{1}{4})=-\dfrac{3}{2}-\ln 4$,$h(\dfrac{1}{2})=-\dfrac{9}{4}$, ……………………………………………………… 11 分

所以 $f(x)$极小值的取值范围是$(-\dfrac{3}{2}-\ln 4,-\dfrac{9}{4})$. ……………………………………………… 12 分