炎德·英才大联考长郡中学2023届高三月考试卷(三)

数学参考答案

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	D	D	B	D	C	D

1. A 【解析】$\because M=\{x\mid x^2>4\}=\{x\mid x<-2$或$x>2\}$,$N=\{x\mid x^2-4x\leqslant 0\}=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 4\}$,所以$M\cap N=\{x\mid 2<x\leqslant 4\}$.故选A.

2. C 【解析】用"$-x$"代替"x",得$f(-x)-g(-x)=(-x)^3+(-x)^2+1$,化简得$f(x)+g(x)=-x^3+x^2+1$,令$x=1$,得$f(1)+g(1)=1$.故选C.

3. D 【解析】由$\overrightarrow{AB}/\!/\boldsymbol{a}$知,存在实数$\lambda$,使$\overrightarrow{AB}=\lambda\boldsymbol{a}=(-\lambda,2\lambda)$,
又$|\overrightarrow{AB}|=3\sqrt{5}$,则$\lambda^2+4\lambda^2=9\times 5$,即$\lambda=3$或$\lambda=-3$,
所以$\overrightarrow{AB}=(3,-6)$或$(-3,6)$.又点$A(-2,1)$,
所以$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=(1,-5)$或$(-5,7)$.故选D.

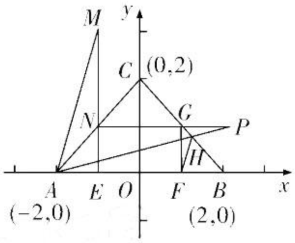
4. D 【解析】若$l/\!/m$,且$m\subset\alpha$,则$l/\!/\alpha$或$l\subset\alpha$,即"$l/\!/m$"$\nRightarrow$"$l/\!/\alpha$";若$l/\!/\alpha$,且$m\subset\alpha$,则$l/\!/m$或l,m异面,则"$l/\!/m$"$\nRightarrow$"$l/\!/\alpha$".因此,"$l/\!/m$"是"$l/\!/\alpha$"的既不充分也不必要条件.故选D.

5. B 【解析】易知四面体$A'EFD$的三条侧棱$A'E,A'F,A'D$两两垂直,且$A'E=1,A'F=1,A'D=2$,把四面体$A'EFD$补成从顶点A'出发的三条棱长分别为$1,1,2$的一个长方体,则长方体的外接球即为四面体$A'EFD$的外接球,球的半径为$r=\frac{1}{2}\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.故选B.

6. D 【解析】$a=\sin 7=\sin(7-2\pi)$.因为$\frac{\pi}{6}<7-2\pi<\frac{\pi}{4}$,所以$\frac{1}{2}<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以$\frac{1}{4}<a^2<\frac{1}{2}$;
因为$y=2^x$在$\mathbf{R}$上为增函数,所以$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}<2^a<2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$;
因为$y=\log_2 x$在$(0,+\infty)$上为增函数,且$\frac{1}{2}<|a|<\frac{\sqrt{2}}{2}$,
所以$\log_2\frac{1}{2}<\log_2|a|<\log_2\frac{\sqrt{2}}{2}$,即$-1<\log_2|a|<-\frac{1}{2}$;
所以$\log_2|a|<a^2<2^a$.故选D.

7. C 【解析】依题意,$g(x)=A\cos\left[\omega\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\varphi\right]=A\cos\left(\omega x-\frac{\omega\pi}{6}+\varphi\right)$,
故$A=2$,又$g(x)$的周期T满足$\frac{T}{4}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}$,得$T=\pi$,所以$\omega=2$,
所以$g(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}+\varphi\right)$,又$g\left(\frac{\pi}{3}\right)=2$,得$2\times\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}+\varphi=2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,
又$-\pi<\varphi<0$,所以$\varphi=-\frac{\pi}{3}$,所以$f(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$,
所以$f(0)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+2\cos\frac{\pi}{3}=2$.故选C.

8. D 【解析】$\because A(-2,0),B(2,0),C(0,2)$,$\therefore$直线$BC$的方程为$x+y-2=0$,直线$AC$的方程为$x-y+2=0$,如图,作$F$关于$BC$的对称点$P$,$\because F(1,0)$,$\therefore P(2,1)$,再作$P$关于$AC$的对称点$M$,则$M(-1,4)$,



连接 MA,ME，且 ME 交 AC 于点 N，则直线 ME 的方程为 $x=-1$，$\therefore N(-1,1)$，

连接 PN,PA，分别交 BC 于点 G,H，则直线 PN 的方程为 $y=1$，直线 PA 的方程为 $x-4y+2=0$，

$\therefore G(1,1)$，$H\left(\frac{6}{5},\frac{4}{5}\right)$. 连接 GF,HF，则 G,H 之间即为点 D 的变动范围.

$\because$ 直线 FG 的方程为 $x=1$，直线 FH 的斜率为 $\frac{\frac{4}{5}}{\frac{6}{5}-1}=4$，$\therefore$ 直线 FD 斜率的取值范围为 $(4,+\infty)$. 故选 D.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

题 号	9	10	11	12
答 案	ABD	BCD	ABD	AD

9. ABD **【解析】**因为 $a-b\geqslant 0$，所以 $a\geqslant b$.

根据不等式的性质可知 A，B 正确；

因为 a,b 的符号不确定，所以 C 不正确；

$\frac{1}{ab^2}-\frac{1}{ba^2}=\frac{a-b}{a^2b^2}\geqslant 0$，可得 $\frac{1}{ab^2}\geqslant\frac{1}{ba^2}$，所以 D 正确. 故选 ABD.

10. BCD **【解析】**由题得 $f(x)=-\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x=-2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)$，

令 $\omega x-\frac{\pi}{6}=k\pi$，解得 $x=\frac{\pi}{6\omega}+\frac{k\pi}{\omega}$，$\because\omega>0$，取 $k=0$，

$\therefore 0<\frac{\pi}{6\omega}\leqslant\frac{\pi}{2}$，即 $\omega\geqslant\frac{1}{3}$. 故选 BCD.

11. ABD **【解析】**根据题意可得纸板 P_n 相较于纸板 $P_{n-1}(n\geqslant 2)$ 剪掉了半径为 $\frac{1}{2^{n-1}}$ 的半圆，故 $L_n=L_{n-1}-\frac{1}{2^{n-1}}\times 2+\frac{1}{2}\pi\times\frac{2}{2^{n-1}}$，即 $L_n-L_{n-1}=\frac{\pi}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{n-2}}$，故 $L_1=\pi+2$，$L_2-L_1=\frac{\pi}{2^1}-\frac{1}{2^0}$，$L_3-L_2=\frac{\pi}{2^2}-\frac{1}{2^1}$，$L_4-L_3=\frac{\pi}{2^3}-\frac{1}{2^2}$，$\cdots$，$L_n-L_{n-1}=\frac{\pi}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{n-2}}$，累加可得 $L_n=\pi+2+\left(\frac{\pi}{2^1}+\frac{\pi}{2^2}+\cdots+\frac{\pi}{2^{n-1}}\right)-\left(\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}\right)=\pi+2+\frac{\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}=\pi\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)+\frac{1}{2^{n-2}}$，所以 $L_3=\pi\left(2-\frac{1}{2^2}\right)+\frac{1}{2^1}=\frac{7}{4}\pi+\frac{1}{2}$，故 A 正确，C 错误；

又 $S_n=S_{n-1}-\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2$，故 $S_n-S_{n-1}=-\frac{\pi}{2^{2n-1}}$，即 $S_{n+1}=S_n-\frac{\pi}{2^{2n+1}}$，故 D 正确；

又 $S_1=\frac{\pi}{2}$，$S_2-S_1=-\frac{\pi}{2^3}$，$S_3-S_2=-\frac{\pi}{2^5}$，$\cdots$，$S_n-S_{n-1}=-\frac{\pi}{2^{2n-1}}$，累加可得 $S_n=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2^3}-\frac{\pi}{2^5}-\cdots-\frac{\pi}{2^{2n-1}}=\frac{\pi}{2}-\frac{\frac{\pi}{8}\left(1-\frac{1}{4^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{1}{2^{2n-1}}\right)$，故 $S_3=\frac{11}{32}\pi$，故 B 正确. 故选 ABD.

12. AD **【解析】**$\because\frac{e^a}{a+1}=\frac{e^b}{b+1}=1.01>0$，

$\therefore a>-1,b>-1$,令 $f(x)=\frac{e^x}{1+x}(x>-1)$,

则 $f'(x)=\frac{xe^x}{(1+x)^2}$,所以 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减,在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,且 $f(0)=1$,

故 $a>0,-1<b<0$.

令 $h(x)=\ln f(x)-\ln f(-x)=2x-\ln(x+1)+\ln(-x+1),x\in(-1,1)$,

则 $h'(x)=2-\frac{1}{x+1}+\frac{-1}{-x+1}=2-\frac{2}{1-x^2}<0$,

所以 $h(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递减,且 $h(0)=0$,

$\because b\in(-1,0),\therefore \ln f(b)-\ln f(-b)>0,\therefore f(b)>f(-b),\therefore f(a)>f(-b),\therefore a>-b$,即 $a+b>0$,故选项 A 正确;

$\because (1-c)e^c=(1-d)e^d=0.99>0,\therefore c<1,d<1$,令 $g(x)=(1-x)e^x(x<1)$,

则 $g'(x)=-xe^x$,所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增,在 $(0,1)$ 上单调递减,且 $g(0)=1$,故 $0<c<1,d<0$.

令 $m(x)=\ln g(x)-\ln g(-x)=2x-\ln(x+1)+\ln(-x+1)=h(x),x\in(-1,1)$,

所以 $m(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递减,且 $m(0)=0$,

$\because c\in(0,1),\therefore \ln g(c)-\ln g(-c)<0,\therefore g(c)<g(-c),\therefore g(d)<g(-c)$,

$\therefore d<-c$,即 $c+d<0$,故选项 B 错误;

$\because f(x)=\frac{1}{g(-x)},\therefore g(-a)=\frac{1}{f(a)}=\frac{100}{101}>0.99,a\in(-1,0)$,

$\therefore g(-a)>g(d)$,又$\because g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增,$\therefore -a>d,\therefore a+d<0$,故选项 C 错误;

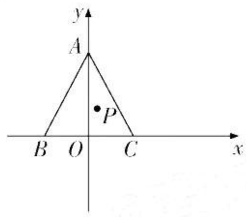
由 C 可知,$g(-b)>g(c),-b\in(0,1)$,又$\because g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,$\therefore -b<c,\therefore b+c>0$,故选项 D 正确.

故选 AD.

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. $-2-i$ 【解析】由题图可知,$z_1=-1+2i$,由 $\frac{z_2}{z_1}=i$,得 $z_2=z_1i=(-1+2i)i=-2-i$.

14. $\sqrt{7}$ 【解析】建立如图所示坐标系,其中 O 为 BC 的中点,所以 $A(0,3\sqrt{3}),B(-3,0),C(3,0)$.



设 $P(x,y)$,则 $\overrightarrow{PA}=(-x,3\sqrt{3}-y),\overrightarrow{PB}=(-3-x,-y),\overrightarrow{PC}=(3-x,-y)$,

又因为 $3\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$,

所以 $3(-x,3\sqrt{3}-y)+2(-3-x,-y)+(3-x,-y)=0$,

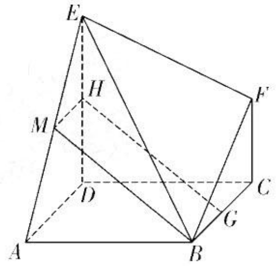
$(-3x-6-2x+3-x,9\sqrt{3}-3y-2y-y)=0$,即 $-6x-3=0,9\sqrt{3}-6y=0$,所以 $P\left(-\frac{1}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$,

所以 $|\overrightarrow{PA}|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{7}$.

15. $\left(-\frac{3}{4},\frac{11}{4}\right)$ 【解析】由 $S_n=(-1)^na_n+\frac{1}{2^n}+n-3$,得 $a_1=-\frac{3}{4}$;当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=(-1)^na_n+\frac{1}{2^n}+n-3-(-1)^{n-1}a_{n-1}-\frac{1}{2^{n-1}}-(n-1)+3=(-1)^na_n+(-1)^na_{n-1}-\frac{1}{2^n}+1$,若 n 为偶数,则 $a_{n-1}=\frac{1}{2^n}-1$,$\therefore a_n=\frac{1}{2^{n+1}}-1$($n$ 为正奇数);若 n 为奇数,则 $a_{n-1}=-2a_n-\frac{1}{2^n}+1=-2\left(\frac{1}{2^{n+1}}-1\right)-\frac{1}{2^n}+1=3-\frac{1}{2^{n-1}}$,$\therefore a_n=3-\frac{1}{2^n}$($n$ 为正偶数).函数 $a_n=\frac{1}{2^{n-1}}-1$(n 为正奇数)为减函数,最大值为 $a_1=-\frac{3}{4}$,函数 $a_n=3-\frac{1}{2^n}$(n 为正偶

数)为增函数,最小值为 $a_2=\frac{11}{4}$. 若 $(a_{n+1}-p)(a_n-p)<0$ 恒成立,则 $a_1<p<a_2$,即 $-\frac{3}{4}<p<\frac{11}{4}$. 故答案为 $\left(-\frac{3}{4},\frac{11}{4}\right)$.

16. ①③④ 【解析】对①:当 H 为 DE 的中点时,取 EA 中点为 M,连接 MH,MB,如下图所示:



因为 H,M 分别为 ED,EA 的中点,故可得 $MH/\!/AD$,$MH=\frac{1}{2}AD$,

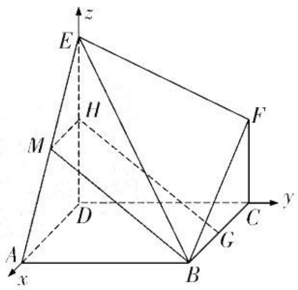
根据已知条件可知:$BG/\!/AD$,$BG=\frac{1}{2}AD$,故 $MH/\!/BG$,$MH=BG$,

故四边形 $HMBG$ 为平行四边形,则 $HG/\!/MB$,又 $MB\subset$ 平面 ABE,$HG\not\subset$ 平面 ABE,故 $HG/\!/$ 平面 ABE,故①正确;

对②:因为 $ED\perp$ 平面 $ABCD$,$DA,DC\subset$ 平面 $ABCD$,故 $DE\perp DA$,$DE\perp DC$,

又四边形 $ABCD$ 为正方形,故 $DA\perp DC$,则 DE,DA,DC 两两垂直,

以 D 为坐标原点,建立空间直角坐标系如下图所示:



则 $A(2,0,0)$,$E(0,0,2)$,$G(1,2,0)$,设 $H(0,0,m)$,$m\in[0,2]$,

若 $GH\perp AE$,则 $\overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{AE}=(-1,-2,m)\cdot(-2,0,2)=0$,

即 $2+2m=0$,解得 $m=-1$,不满足题意,故②错误;

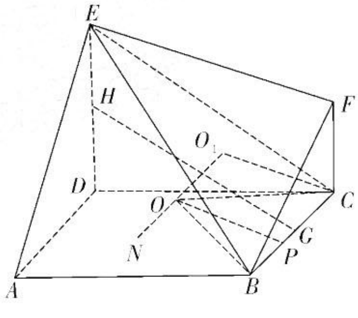
对③:$V_{B\text{-}GFH}=V_{H\text{-}BGF}$,因为 B,F,G 均为定点,故 $S_{\triangle BGF}$ 为定值,又 $DE/\!/CF$,$CF\subset$ 平面 BGF,$DE\not\subset$ 平面 BGF,故 $DE/\!/$ 平面 BGF,又点 H 在 DE 上运动,故点 H 到平面 BGF 的距离是定值,故三棱锥 $B-GFH$ 的体积为定值,则③正确;

对④:取 $\triangle EFC$ 的外心为 O_1,过 O_1 作平面 EFC 的垂线 O_1N,则三棱锥 $B-EFC$ 的外接球的球心 O 一定在 O_1N 上,

因为 $OO_1\perp$ 平面 EFC,$FC\perp$ 平面 $ABCD$,$CB\subset$ 平面 $ABCD$,则 $CF\perp CB$,又 $CB\perp CD$,

$CF\cap CD=C$,$CF,CD\subset$ 平面 $EFCD$,故 $CB\perp$ 平面 $EFCD$,即 $BC\perp$ 平面 EFC,

则 $OO_1/\!/CB$,故 OO_1,BC 在同一个平面,则过 O 作 $OP\perp BC$,连接 OB,OC 如图所示.



数学试题参考答案(长郡版)— 4

在$\triangle EFC$中，容易知$EF=\sqrt{5}$，$EC=2\sqrt{2}$，$FC=1$，

则由余弦定理可得$\cos\angle EFC=\frac{5+1-8}{2\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，故$\sin\angle EFC=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

则由正弦定理可得$O_1C=\frac{EC}{2\sin\angle EFC}=\frac{\sqrt{10}}{2}=OP$；

设三棱锥$E\ \ FCB$的外接球半径为R，则$OC=OB=R$，

在$\triangle OBP$中，$OB=R$，$OP=\frac{\sqrt{10}}{2}$，又$BP=2-PC=2-OO_1=2-\sqrt{OC^2-O_1C^2}=2-\sqrt{R^2-\frac{5}{2}}$，

故由勾股定理可知：$OB^2=OP^2+BP^2$，即$R^2=\frac{5}{2}+4+R^2-\frac{5}{2}-4\sqrt{R^2-\frac{5}{2}}$，

解得：$R^2=\frac{7}{2}$，则该棱锥外接球的表面积$S=4\pi R^2=14\pi$，故④正确．故答案为①③④．

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．**【解析】**(1)设公差为d，则依题意得$a_2=-3$，

则$a_1=-3-d$，$a_3=-3+d$，

$\therefore(-3-d)(-3)(-3+d)=-15$，得$d^2=4$，$d=\pm2$，

$\therefore a_n=-2n+1$或$a_n=2n-7$． …………………………………………………………… 5分

(2)由题意得$a_n=2n-7$，所以$|a_n|=\begin{cases}7-2n, n\leqslant 3,\\ 2n-7, n\geqslant 4,\end{cases}$

①$n\leqslant 3$时，$S_n=-(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\frac{5+(7-2n)}{2}n=6n-n^2$；

②$n\geqslant 4$时，$S_n=-a_1-a_2-a_3+a_4+\cdots+a_n=-2(a_1+a_2+a_3)+(a_1+a_2+\cdots+a_n)=18-6n+n^2$．

综上，数列$\{|a_n|\}$的前n项和$S_n=\begin{cases}-n^2+6n, n\leqslant 3,\\ n^2-6n+18, n\geqslant 4.\end{cases}$ ………………………………………… 10分

18．**【解析】**(1)由正弦定理$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$得：$4\sqrt{3}\sin B\cos C=4\sqrt{3}\sin A-2\sqrt{3}\sin C$，……
……………………………………………………………………………………………… 2分

即$2\sqrt{3}\sin B\cos C=2\sqrt{3}\sin(B+C)-\sqrt{3}\sin C$，即$2\sqrt{3}\sin C\cos B=\sqrt{3}\sin C$，因为$\sin C\neq 0$， ………… 4分

化简得$\cos B=\frac{1}{2}$，$\because B\in(0,\pi)$，$\therefore B=60°$． ……………………………………………… 6分

(2)设AC边上的中线为BD，则$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$，所以$\overrightarrow{BD}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{BC}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC})$，

$|\overrightarrow{BD}|^2=\frac{1}{4}(|\overrightarrow{BA}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+2|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cos B)$，即有$\frac{25}{4}=\frac{1}{4}(a^2+c^2+ac)$， ① ………………… 8分

又$b=2R\sin B=3$，由余弦定理$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$得$9=a^2+c^2-ac$， ② …………………… 10分

由①②得$ac=8$， ……………………………………………………………………………… 11分

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=2\sqrt{3}$． ……………………………………………………… 12分

19．**【解析】**(1)随机变量X的所有可能取值为0，1，2，3， ………………………………………… 1分

$P(X=0)=\left(\frac{1}{3}\right)^3+C_3^1\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$，$P(X=1)=C_4^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{8}{81}$，

$P(X=2)=C_4^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}=\frac{16}{81}$，$P(X=3)=C_3^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{16}{27}$， ………… 5分

所以X的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{16}{27}$

所以数学期望 $E(X)=0\times\frac{1}{9}+1\times\frac{8}{81}+2\times\frac{16}{81}+3\times\frac{16}{27}=\frac{184}{81}$. ………………………………………………… 6 分

(2)记“甲、乙两队比赛两场后，两队积分相等”为事件 A，

设第 i 场甲、乙两队积分分别为 X_i、Y_i，则 $X_i=3-Y_i$，$i=1,2$，

因两队积分相等，所以 $X_1+X_2=Y_1+Y_2$，即 $X_1+X_2=(3-X_1)+(3-X_2)$，则 $X_1+X_2=3$，…………… 8 分

所以 $P(A)=P(X_1=0)P(X_2=3)+P(X_1=1)P(X_2=2)+P(X_1=2)P(X_2=1)+P(X_1=3)P(X_2=0)$

$=\frac{1}{9}\times\frac{16}{27}+\frac{8}{81}\times\frac{16}{81}+\frac{16}{81}\times\frac{8}{81}+\frac{16}{27}\times\frac{1}{9}=\frac{1120}{6561}$. ……………………………………………………… 12 分

20.【解析】(1)过点 D 作 $DO\perp AC$ 交 AC 与点 O，

$\because$ 平面 $ABC\perp$ 平面 ACD，且两平面的交线为 AC，

$\therefore DO\perp$ 平面 ABC，………………………………………………………………………………… 2 分

又 $\because DE//$ 平面 ABC，$\therefore DO\perp DE$，……………………………………………………………… 3 分

又 $\because AD\perp DE$ 且 $AD\cap DO=D$，$\therefore DE\perp$ 平面 ACD. ……………………………………………… 4 分

(2)过点 E 作 $EN\perp BC$ 交 BC 与点 N，连接 ON，

$\because$ 平面 $ABC\perp$ 平面 BCE，且两平面的交线为 BC，

$\therefore EN\perp$ 平面 ABC，又 $\because DE//$ 平面 ABC，$\therefore D,E$ 到平面 ABC 的距离相等，

$\therefore DO//EN$ 且 $DO=EN$，$ON\perp$ 平面 ACD，$\therefore CO=ON$，$DE=ON$，

$\therefore V_{ABCDE}=V_{E\text{-}ABC}+V_{E\text{-}ACD}=\frac{1}{3}EN\cdot S_{\triangle ABC}+\frac{1}{3}DE\cdot S_{\triangle ACD}=\frac{1}{3}EN+\frac{1}{3}DE\cdot DO=\frac{1}{3}DO(1+DE)$，

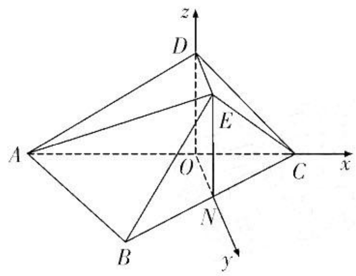
又 $DO^2+DE^2=DO^2+CO^2=CD^2=1$，令 $DE=x(0\leqslant x\leqslant 1)$，

则 $V_{ABCDE}=f(x)=\frac{1}{3}DO(1+DE)=\frac{\sqrt{1-x^2}(1+x)}{3}$，$f'(x)=\frac{1+x}{3\sqrt{1-x^2}}(1-2x)$.

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递减，

即 $V_{ABCDE}\leqslant f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}$，当且仅当 $DE=\frac{1}{2}$ 时取得最大值. ……………………………………… 8 分

如图所示，以点 O 为原点建立空间直角坐标系 $O-xyz$，



则 $A\left(-\frac{3}{2},0,0\right)$，$B\left(-\frac{1}{2},1,0\right)$，$E\left(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$C\left(\frac{1}{2},0,0\right)$，$D\left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

所以 $M\left(-\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$，$\overrightarrow{AM}=\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$，$\overrightarrow{CD}=\left(-\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

设 AM 与 CD 所成角为 α，则 $\cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AM}|\cdot|\overrightarrow{CD}|}=\frac{\sqrt{37}}{37}$，…………………………………………………… 11 分

则 $\tan\alpha=6$，即当几何体 $ABCDE$ 体积最大时，AM 与 CD 所成角的正切值为 6. ………………… 12 分

21.【解析】(1)由题意知 $P(0,3)$，过点 P 与椭圆相切的直线斜率存在，设切线方程为 $y=kx+3$，

联立 $\begin{cases}y=kx+3,\\x^2+2y^2=6,\end{cases}$ 可得 $(2k^2+1)x^2+12kx+12=0$，(＊) ……………………………………………… 1 分

由 $\Delta=144k^2-48(2k^2+1)=48(k^2-1)=0$，

可得 $k=\pm1$， …………………………………………………………………………… 2 分

即切线方程为 $y=\pm x+3$，所以，$PA\perp PB$，

将 $k=1$ 代入方程(*)可得 $x^2+4x+4=0$，可得 $x=-2$，此时 $y=1$，

不妨设点 $A(-2,1)$，同理可得点 $B(2,1)$，$|PA|=|PB|=\sqrt{4+(1-3)^2}=2\sqrt{2}$， …………………… 3 分

因此，$S=\frac{1}{2}|PA|\cdot|PB|=4$. …………………………………………………………………… 4 分

(2)证明：先证明出椭圆 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ 在其上一点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线方程为 $\frac{x_0x}{6}+\frac{y_0y}{3}=1$，

因为点 $M(x_0,y_0)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ 上，则 $x_0^2+2y_0^2=6$，

联立 $\begin{cases}\frac{x_0x}{6}+\frac{y_0y}{3}=1,\\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 消去 y 可得 $\frac{(x_0^2+2y_0^2)x^2}{36}-\frac{x_0x}{3}+1-\frac{y_0^2}{3}=0$，

整理得 $x^2-2x_0x+x_0^2=0$，即 $(x-x_0)^2=0$，解得 $x=x_0$，

因此，椭圆 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ 在其上一点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线方程为 $\frac{x_0x}{6}+\frac{y_0y}{3}=1$. ………………………… 6 分

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则切线 PA 的方程为 $\frac{x_1x}{3}+\frac{y_1y}{6}=1$，切线 PB 的方程为 $\frac{x_2x}{3}+\frac{y_2y}{6}=1$.

设 $P(m,n)$，则 $\begin{cases}\frac{mx_1}{6}+\frac{ny_1}{3}=1,\\ \frac{mx_2}{6}+\frac{ny_2}{3}=1,\end{cases}$

所以，点 A,B 的坐标满足方程 $mx+2ny-6=0$，所以，直线 AB 的方程为 $mx+2ny-6=0$， …………… 8 分

因为点 $P(m,n)$ 在直线 $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1$ 上，则 $m+2n=6$，则 $2n=6-m$，

所以，直线 AB 的方程可表示为 $mx+(6-m)y-6=0$，即 $m(x-y)+6(y-1)=0$，

由 $\begin{cases}x-y=0,\\ y-1=0,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x=1,\\ y=1,\end{cases}$ 故直线 AB 过定点 $T(1,1)$， ………………………………………………… 10 分

因为 $OD\perp AB$，所以，点 D 在以 OT 为直径的圆上，

当点 Q 为线段 OT 的中点时，$|DQ|=\frac{1}{2}|OT|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，此时点 Q 的坐标为 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

故存在点 $Q\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，使得 $|DQ|$ 为定值 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. ……………………………………………………………… 12 分

22.【解析】(1)令 $f(x)=0$，得 $xe^{nx}-nx=0$. 所以 $x=0$ 或 $e^{nx}=n$. 即 $x=0$ 或 $x=\frac{\ln n}{n}$. ……………………… 1 分

因为点 P 在点 Q 的左侧，所以 $P(0,0)$，$Q\left(\frac{\ln n}{n},0\right)$.

因为 $f'(x)=(nx+1)e^{nx}-n$，所以 $f'(0)=1-n$，

得点 P 处的切线方程为 $y=(1-n)x$，即 $g(x)=(1-n)x$. …………………………………………… 2 分

当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)-g(x)=xe^{nx}-nx-(1-n)x=x(e^{nx}-1)$，

因为 $x\geqslant0$，$n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\geqslant2$，所以 $nx\geqslant0$，所以 $e^{nx}\geqslant1$，即 $e^{nx}-1\geqslant0$.

所以 $x(e^{nx}-1)\geqslant0$，所以 $f(x)\geqslant g(x)$. ………………………………………………………… 4 分

(2)不妨设 $x_1\leqslant x_2$，且只考虑 $x\geqslant0$ 的情形.

因为 $f'(x)=(nx+1)e^{nx}-n$，所以 $f'\left(\frac{\ln n}{n}\right)=\left(n\frac{\ln n}{n}+1\right)e^{\ln n}-n=(\ln n+1)n-n=n\ln n$.

所以点 Q 处的切线方程为 $y=n\ln n\left(x-\frac{\ln n}{n}\right)=(n\ln n)x-\ln^2 n$，记 $h(x)=(n\ln n)x-\ln^2 n$， ………… 5 分

令 $F(x)=f(x)-h(x)=xe^{nx}-nx-[(n\ln n)x-\ln^2 n]=xe^{nx}-(n+n\ln n)x+\ln^2 n,x\geqslant 0$，

设 $G(x)=F'(x)=(nx+1)e^{nx}-(n+n\ln n)$，则 $G'(x)=n(nx+2)e^{nx}>0$. 所以 $F'(x)$ 单调递增. …… 6 分

又因为 $F'\left(\frac{\ln n}{n}\right)=\left(n\frac{\ln n}{n}+1\right)e^{\ln n}-(n+n\ln n)=0$，

所以，当 $x\in\left(0,\frac{\ln n}{n}\right)$ 时，$F'(x)<0$；当 $x\in\left(\frac{\ln n}{n},+\infty\right)$ 时，$F'(x)>0$.

所以 $F(x)$ 在 $\left(0,\frac{\ln n}{n}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{\ln n}{n},+\infty\right)$ 上单调递增. 所以 $F(x)$ 在 $x=\frac{\ln n}{n}$ 时有极小值，也是最小值，

即 $F(x)\geqslant F\left(\frac{\ln n}{n}\right)=\frac{\ln n}{n}e^{n\cdot\frac{\ln n}{n}}-(n+n\ln n)\frac{\ln n}{n}+\ln^2 n=0$，所以当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant h(x)$. …………… 8 分

设方程 $h(x)=t$ 的根为 x_2'，则 $x_2'=\frac{t+\ln^2 n}{n\ln n}$.

易知 $h(x)$ 单调递增，由 $h(x_2)\leqslant f(x_2)=t=h(x_2')$，所以 $x_2\leqslant x_2'$.

对于(1)中 $g(x)=(1-n)x$，设方程 $g(x)=t$ 的根为 x_1'，则 $x_1'=\frac{t}{1-n}$.

易知 $g(x)$ 单调递减，由(1)知 $g(x_1)\leqslant f(x_1)=t=g(x_1')$，所以 $x_1'\leqslant x_1$.

所以 $x_2-x_1\leqslant x_2'-x_1'=\frac{t+\ln^2 n}{n\ln n}-\frac{t}{1-n}=\left(\frac{1}{n\ln n}+\frac{1}{n-1}\right)t+\frac{\ln n}{n}$. ……………………………………………… 10 分

因为 $n\ln n-(n-1)=n(\ln n-1)+1$，易知 $n\geqslant 3$ 时，$\ln n-1>0$，故 $n(\ln n-1)+1>0(n\geqslant 3)$；

当 $n=2$ 时，$2(\ln 2-1)+1=\ln 4-1>0$，所以 $n\ln n>n-1>0$，

所以 $0<\frac{1}{n\ln n}<\frac{1}{n-1}$，所以 $\frac{1}{n\ln n}+\frac{1}{n-1}>\frac{2}{n\ln n}$.

记 $\varphi(x)=f'(x)=(nx+1)e^{nx}-n,x\geqslant 0$，则 $\varphi'(x)=n(nx+2)e^{nx}>0$ 恒成立.

所以 $f'(x)=(nx+1)e^{nx}-n$ 单调递增，因为 $f'(0)=1-n<0,f'\left(\frac{\ln n}{n}\right)=n\ln n>0$，

所以存在 $x_0\in\left(0,\frac{\ln n}{n}\right)$ 使得 $f'(x_0)=0$. 所以，当 $x\in(0,x_0)$ 时. $f'(x)<0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增. ……………………………………………………… 11 分

因为 $f(0)=0,f\left(\frac{\ln n}{n}\right)=0$，由函数图象知当方程 $f(x)=t$(t 为实数)有两个正实根 x_1,x_2 时，$t<0$，

所以 $\left(\frac{1}{n\ln n}+\frac{1}{n-1}\right)t<\frac{2t}{n\ln n}$. 所以 $x_2-x_1\leqslant x_2'-x_1'<\frac{2t}{n\ln n}+\frac{\ln n}{n}$，即 $|x_2-x_1|<\frac{2t}{n\ln n}+\frac{\ln n}{n}$. ……… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。