

2023 年大连市高三双基测试

数 学

命题人：安道波 林卓 宋永任 校对入：安道波

注意事项：

1. 请在答题纸上作答，在试卷上作答无效。
2. 本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，共 150 分，考试时间 120 分钟。

第 I 卷

一. 单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求。

1. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \left\{x \mid \frac{x-1}{2} \in Z\right\}$, 则 $A \cap B =$

- (A) $\{5\}$ (B) $\{3, 5\}$ (C) $\{1, 3, 5\}$ (D) $\{2, 4\}$

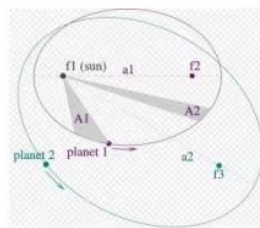
2. i 是虚数单位，若复数 $z = \frac{5}{4+3i}$, 则 z 的共轭复数 $\bar{z} =$

- (A) $\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$ (B) $\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$ (C) $-\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$ (D) $-\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$

3. 已知命题 $p: \exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 - x_0 + 1 < 0$, 则 $\neg p$ 是

- (A) $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 - x_0 + 1 \geq 0$ (B) $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x + 1 \geq 0$
(C) $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x + 1 < 0$ (D) $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x + 1 > 0$

4. 开普勒 (Johannes Kepler, 1571~1630), 德国数学家、天文学家, 他提出的行星运动三定律之三: 如图, 所有行星绕太阳运动的轨道都是椭圆, 且所有行星轨道的半长轴的三次方与它的公转周期的二次方的比都相等. 已知金星与地球的公转周期之比约为 2:3, 地球运行轨道的半长轴为 a , 则金星运行轨道的半长轴约为 (参考数据: $3^{\frac{1}{3}} \approx 1.442$)



- (A) $0.66a$ (B) $0.70a$ (C) $0.76a$ (D) $0.96a$

5. 若二项式 $\left(ax + \frac{1}{x^2}\right)^6$ ($a > 0$) 的展开式中所有项的系数和为 64, 则展开式中的常数项为

- (A) 10 (B) 15 (C) 25 (D) 30

6. 若 $\alpha \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, 且 $\cos^2 \alpha + \cos(\frac{\pi}{2} + 2\alpha) = -\frac{1}{2}$, 则 $\tan \alpha =$

- (A) $\sqrt{3}$ (B) 2 (C) 3 (D) $2\sqrt{3}$

7. 已知 $a = \frac{32(4 - \ln 32)}{e^4}$, $b = \frac{1}{e}$, $c = \frac{\log_{\sqrt{e}} 2}{4}$, 则

- (A) $a < c < b$ (B) $c < a < b$ (C) $a < b < c$ (D) $b < a < c$

8. 已知函数 $f(x), g(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} , 且 $f(x) + g(2-x) = 5, g(x) - f(x-4) = 7$. 若

$y = g(x)$ 的图像关于直线 $x = 2$ 对称, $g(2) = 4$, 则 $\sum_{k=1}^{22} f(k) =$

- (A) -21 (B) -22 (C) -23 (D) -24

二. 多项选择题: (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.)

9. 将函数 $f(x) = \cos(2x - \pi)$ 图像上所有的点向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到函数 $g(x)$ 的图像, 则

- (A) $g(x)$ 的最小正周期为 π
 (B) $g(x)$ 图像的一个对称中心为 $(\frac{7}{12}\pi, 0)$
 (C) $g(x)$ 的单调递减区间为 $[\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi] (k \in \mathbf{Z})$
 (D) $g(x)$ 的图像与函数 $y = -\sin(2x - \frac{\pi}{6})$ 的图像重合

10. 下列正确的是 ()

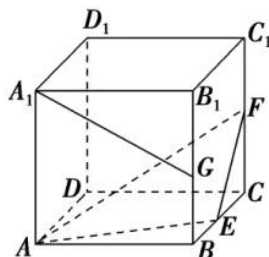
(A) 若随机变量 $\xi \sim N(1, \sigma^2)$, $P(\xi \leq 4) = 0.77$, 则 $P(\xi \leq -2) = 0.23$

(B) 若随机变量 $X \sim B(10, \frac{1}{3})$, 则 $D(3X - 1) = 19$

(C) 已知回归直线方程为 $y = \hat{b}x + 10.8$, 且 $\bar{x} = 4$, $\bar{y} = 50$, 则 $\hat{b} = 9.8$

(D) 已知一组数据丢失了其中一个, 剩下的六个数据分别是 3, 3, 5, 3, 6, 11. 若这组数据的平均数、中位数、众数依次成等差数列, 则丢失数据的所有可能值的和为 22

11. 正方体 $ABCD A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, E, F, G 分别为 BC, CC_1, BB_1 的中点, 则
- (A) 直线 D_1D 与直线 AF 垂直
 (B) 直线 A_1G 与平面 AEF 平行
 (C) 平面 AEF 截正方体所得的截面面积为 $\frac{9}{8}$
 (D) 点 A_1 与点 D 到平面 AEF 的距离相等



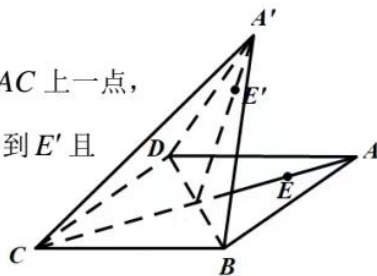
12. 已知点 F 是抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点, AB, CD 是经过点 F 的弦且 $AB \perp CD$, 直线 AB 的斜率为 k , 且 $k > 0$, C, A 两点在 x 轴上方, 则
- (A) $\vec{OC} \cdot \vec{OD} = -3$ (B) 四边形 $ABCD$ 面积最小值为 64
 (C) $\frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|CD|} = \frac{1}{4}$ (D) 若 $|AF| \cdot |BF| = 16$, 则直线 CD 的斜率为 $-\sqrt{3}$

第 II 卷

三. 填空题: (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 把答案填在答卷纸的相应位置上)

13. 设向量 $\mathbf{a} = (m, 2)$, $\mathbf{b} = (2, 1)$, 且 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$, 则 $m =$ _____.
14. 若直线 $y = ax - 3$ 为函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$ 图像的一条切线, 则 a 的值是 _____.
15. 已知 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ 为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的两个焦点, P 为椭圆 C 上一点 (P 不在 y 轴上), ΔPF_1F_2 的重心为 G , 内心为 M , 且 $GM \parallel F_1F_2$, 则椭圆 C 的离心率为 _____.

16. 已知菱形 $ABCD$ 边长为 6, $\angle ADC = \frac{2\pi}{3}$, E 为对角线 AC 上一点, $AE = \sqrt{3}$. 将 ΔABD 沿 BD 翻折到 $\Delta A'BD$ 的位置, E 移动到 E' 且二面角 $A'-BD-A$ 的大小为 $\frac{\pi}{3}$, 则三棱锥 $A'-BCD$ 的外接球的半径为 _____; 过 E' 作平面 α 与该外接球相交, 所得截面面积的最小值为 _____.



四. 解答题: (本大题共 6 小题, 共 70 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

已知公差为正数的等差数列 $\{a_n\}$ 的前项和为 S_n , $a_1 = 1$, _____.

请从以下二个条件中任选一个, 补充在题干的横线上, 并解答下列问题:

① S_2, S_4, S_8 成等比数列, ② $a_5 a_{10} - a_7^2 = 2$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 若 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (本小题满分 12 分)

记 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $(b+c)(\sin B - \sin C) = (\sin A - \sin C)a$.

(I) 求 B 的值;

(II) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, $b = 2$, 求 $\triangle ABC$ 周长.

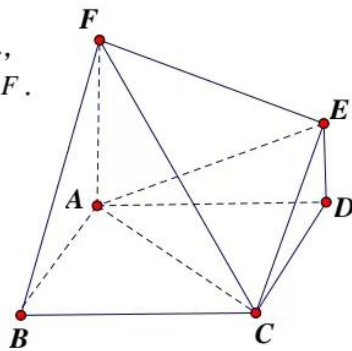
19. (本小题满分 12 分)

如图多面体 $ABCDEF$, 正方形 $ABCD$ 的边长为 4, $AF \perp$ 面 $ABCD$, $AF = 2$, $AF \parallel DE$, $DE < AF$.

(I) 求证: $CE \parallel$ 平面 ABF .

(II) 若二面角 $B-CF-E$ 的大小为 α ,

且 $|\cos \alpha| = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, 求 DE 长.



20. (本小题满分 12 分)

某地区为居民集体筛查新型冠状病毒，需要核酸检测，现有 $k(k \in \mathbf{N}^*, k \geq 2)$ 份样本，有以下两种检验方案，方案一：逐份检验，则需要检验 k 次；方案二：混合检验，将 k 份样本分别取样混合在一起检验一次，若检验结果为阴性，则 k 份样本均为阴性，若检验结果为阳性，为了确定 k 份样本的阳性样本，则对 k 份本再逐一检验.逐份检验和混合检验中的每一次检验费用都是 16 元，且 k 份样本混合检验一次需要额外收 20 元的材料费和服务费.假设在接受检验的样本中，每份样本是否为阳性是相互独立的，且据统计每份样本是阴性的概率为 $p(0 < p < 1)$.

(I) 若 $k(k \in \mathbf{N}^*, k \geq 2)$ 份样本采用混合检验方案，需要检验的总次数为 X ，求 X 分布列及数学期望；

(II) ①若 $k=5, p > \sqrt[5]{0.45}$ ，以检验总费用为决策依据，试说明该单位选择方案二的合理性；

②若 $p = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ ，采用方案二总费用的数学期望低于方案一，求 k 的最大值.

参考数据： $\ln 2=0.7$ ， $\ln 3=1.1$ ， $\ln 7=1.9$ ， $\ln 10=2.3$ ， $\ln 11=2.4$

21. (本小题满分 12 分)

已知双曲线 $Q: \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$, 经过坐标原点 O 的直线 l 与双曲线 Q 交

于 A, B 两点, 点 $A(x_1, y_1)$ 位于第一象限, $C(x_2, y_2)$ 是双曲线 Q 右支上一点,

$AB \perp AC$, 设 $D\left(x_1, -\frac{3y_1}{2}\right)$.

- (I) 求双曲线 Q 的标准方程;
- (II) 求证: C, D, B 三点共线;
- (III) 若 $\triangle ABC$ 面积为 $\frac{48}{7}$, 求直线的 l 方程.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{2} \ln^2 x + \ln x + kx - k$, $g(x) = \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{e} x - f(x)$,

- (I) 若 $k \leq -1$ 时, 求证: 函数 $f(x)$ 只有一个零点;
- (II) 对 $\forall x_1 \neq x_2$ 时, 总有 $\frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} > 2$ 恒成立, 求 k 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

